UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Secção Autónoma de Ciências Sociais Aplicadas

Ciências de Educação

Processos de Aprendizagem do Conceito de Derivada em Contextos Computacionais

Uma experiência de ensino no 12º ano de escolaridade

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Ciências de Educação — Área Educação e Desenvolvimento, sob orientação conjunta da Professora Doutora Teresa Ambrósio e do Dr. José Manuel Matos

Maria de Lourdes Ventura Fernandes

Lisboa

1997

Aos meus Pais

Resumo

Este estudo pretendeu compreender os processos de aprendizagem do conceito de derivada, utilizando uma experiência de ensino com ênfase na experimentação e na visualização gráfica, em contextos computacionais, e num ambiente de trabalho em grupo.

Era nosso objectivo que os alunos compreendessem os conceitos relacionados com as derivadas através da exploração das conexões existentes entre as múltiplas representações, em detrimento da mera utilização de complexas regras de cálculo.

Utilizou-se uma metodologia de experiência de ensino, concretizada numa intervenção didáctica que envolveu alguns alunos de duas turmas de 12° ano de escolaridade, no ano de 1995.

Utilizou-se o programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus* que permite visualizar as sucessivas rectas secantes aproximando-se da tangente e sobrepor os gráficos da função e da função derivada.

Recolheram-se dados através de: (a) episódios de ensino; (b) gravações audio e vídeo; (c) entrevistas; (d) observação das aulas; (e) inquéritos; (f) respostas às actividades das fichas e a questões de testes de avaliação.

Verificou-se que os alunos utilizaram estratégias que denominámos de *geométricas* (os gráficos eram o local privilegiado de resolução das questões e apresentavam informação que os alunos tratavam utilizando uma terminologia imbuída de movimento), *analíticas* (os alunos utilizavam factos, regras, fórmulas e teoremas, usando uma terminologia estática, sem conexão com a representação gráfica) e estratégias *mistas* (que interligavam estas duas).

A maioria dos alunos construiu os conceitos estabelecendo conexões adequadas entre as múltiplas representações.

O desenvolvimento das actividades, em grupo e com o auxílio do computador, levou os alunos a cooperar de uma forma sã e efectiva. A troca de ideias nos grupos obrigou não só a uma maior clarificação dos conceitos mas também a uma confronto com estratégias diferentes, ao desenvolvimento de capacidades de reflexão e de argumentação.

Abstract

The present study tried to understand the processes involved in learning the concept of derivative, by using a teaching experiment emphasizing experimentation and graphic visualization, in computational contexts, and in a group work environment.

The objective was for students to understand the concepts related to derivatives through exploring the connections between multiple representations, instead of the mere use of the complex rules of calculus.

A teaching experiment methodology was used, implemented through a didactic intervention which involved students belonging to a 12th grade class, in 1995.

The *Graphic Approach to the Calculcus* software was used, which allows one to visualize the successive secants approaching the tangent and also to overlap graphs of the function and derivative function.

Data was collected through: (a) teaching episodes; (b) audio and video recordings; (c) interviews; (d) class observation; (e) questionnaires; (f) answers to the worksheets and to questions of the tests.

Conclusions were that students use strategies we came to call *geometric* (graphs were the privileged environment of solving the questions and presented information that students dealt with by using a motion-laden terminology), *analytic* (students used facts, rules, formulas and theorems, and used a static terminology, with no apparent connection with the graphic representation) and *mixed* strategies (which linked both).

Most students built the concepts by establishing appropriate connections between the multiple representations.

The development of the activities, both in group and with the help of the computer, led students to cooperate in a sound and effective manner. The exchange of ideas inside the groups led not only to a better clarification of the concepts but also to a confrontation of different strategies and to the development of reflective and argumentative skills.

Índice de matérias

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1

Introdução

Qualquer investigação traz consigo os valores, preferências, interesses e princípios que orientam o investigador. Este, como pessoa determinada histórica e espacialmente, projecta no seu trabalho de pesquisa os valores e os princípios considerados importantes nessa sociedade, nessa época.

Numa sociedade caracterizada por mudanças frequentes e rápidas, as competências matemáticas necessárias aos indivíduos para uma vida produtiva, nessa mesma sociedade, têm que ser alteradas. A Escola pode ser o espaço adequado ao desenvolvimento dessas competências.

Vivemos uma época em que o desenvolvimento tecnológico se produz a uma velocidade vertiginosa. As Tecnologias de Informação e Comunicação são os suportes materiais desse desenvolvimento. Por isso, a sua utilização em meio educativo é cada vez mais inevitável. E estas tecnologias, quando vistas como ferramentas de apoio ao trabalho dos actores do processo de ensino/aprendizagem, podem tornar-se poderosos ambientes que poderão contribuir para o desenvolvimento de novas capacidades e novas atitudes em professores e alunos.

Ao estudarmos os processos de aprendizagem do conceito de derivada em contextos computacionais, pensamos contribuir, de algum modo, para o esclarecimento de algumas questões ligadas à didáctica e metodologia da Matemática, em particular, e às Ciências da Educação, em geral.

1.1. Motivações pessoais

As motivações pessoais para o tema da investigação são o resultado da minha actividade profissional: professora de Matemática numa Escola Secundária, promovendo, sempre que possível, o ensino e aprendizagem desta disciplina recorrendo a ferramentas computacionais; colaboradora da formação de professores de Matemática no âmbito do Projecto Minerva e do Programa FOCO.

No ano lectivo 1985/86 a realidade portuguesa passou a contar com o Projecto MINERVA que tinha como objectivos primordiais: A Introdução das Tecnologias de Informação nas escolas e planos curriculares não superiores; a formação de professores; a valorização do sistema educativo.

A Escola em que então leccionava aderiu, nesse mesmo ano, a este Projecto Nacional. No ano seguinte, estava envolvida nesse desafio como Coordenadora do então CEI (Centro Escolar de Informática).

Através da formação proporcionada pelos elementos do Pólo do Projecto Minerva de FCT/UNL, percebi que podia existir uma elevada relação entre os Computadores e o Ensino da Matemática. Os computadores poderiam ser um dos "ingredientes apetitosos" para o ensino e aprendizagem desta disciplina. E, utilizando "Sistemas Timex", aventurei-me a estudar, com duas turmas de 11° ano, a unidade didáctica Funções, recorrendo a essas ferramentas que hoje, se ainda existem, são peças de museu. A experiência foi positiva na medida em que os alunos exploraram e construíram, com relativa facilidade, os conceitos. O ambiente foi propício a essa exploração e alguns alunos passaram a olhar para a disciplina de Matemática com outras lentes. O espírito competitivo e a falta de cooperação que noutras aulas se fazia, por vezes, sentir (de recordar que se tratava de alunos do complementar com um objectivo bem definido — tirar boas notas para adquirir o passaporte para o Ensino Superior), foram-se desvanecendo à medida que as actividades em grupo e com recurso a ferramentas computacionais se tornavam um hábito.

No final do ano, em conversa informal com alguns desses alunos, tive a alegria de escutar comentários do tipo: "as aulas que tivemos na sala dos computadores foram das mais interessantes".

A partir daí era impossível parar.

Ao longo destes anos, foram preparadas e leccionadas outras unidades didácticas recorrendo a ferramentas computacionais: Geometria, Estatística e Funções. Nos novos currículos, trata-se de temas a privilegiar ao longo da escolaridade básica e secundária (DGEBS, 1991a, 1991b, DES, 1997; NCTM, 1991). Um gosto pessoal pelo ramo das Funções esteve na base da realização deste estudo.

A experiência diz-nos que os alunos, de uma maneira geral, demonstram competência procedimental para levar a cabo complexas regras de derivação mas falta-lhes a compreensão dos conceitos subjacentes ao estudo da Análise. As representações gráficas e a visualização são parte da compreensão matemática. Se os alunos tiverem oportunidade de explorar e sintetizar as relações que existem entre a informação analítica e gráfica, eles podem construir uma mais rica compreensão do conceito de derivada. A visualização é uma parte importante dessa compreensão. Os computadores podem criar novos ambientes de aprendizagem e ajudar a construir, de uma forma dinâmica, algumas imagens fundamentais para a compreensão dos conceitos de Análise.

Nestes ambientes de aprendizagem os alunos realizam as tarefas com alegria e entusiasmo. Por vezes, cria-se uma certa "agitação" no desenvolvimento de actividades que apelam à iniciativa e descoberta. Consideramos, no entanto, ser uma "agitação" saudável, fruto de um verdadeiro envolvimento. Os alunos não "dormitam" aguardando ansiosamente que a campainha os acorde para mais um intervalo. O computador parece exercer uma inegável atracção que ajuda a desenvolver um espírito de persistência na resolução de determinadas tarefas.

O clima dentro da sala de aula é diferente. O professor deixa de estar sobre o estrado junto ao quadro, para saltitar de grupo em grupo e sentar-se ao lado dos que manifestam mais dificuldades e, assim, tornar-se mais um companheiro de descoberta (Veloso, 1988). Este clima, só por si, parece criar um ambiente pedagógico que, obrigatoriamente, conduz à mudança do processo educativo.

No âmbito da formação de professores, promovida pelo Pólo do Projecto Minerva da FCT/UNL, a exploração de *software* específico para a disciplina de Matemática, obrigou a uma reflexão no sentido de promover essa mudança, através do desenvolvimento de actividades que tenham em conta o alargamento a novos objectivos educativos e a novas formas de lidar com a informação.

As Tecnologias de Informação têm um impacto no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, originando novos objectivos, novos conteúdos e novas metodologias de ensino assim como novos papéis para professores e alunos.

Surge assim a curiosidade de compreender, de uma forma estruturada, e com maior detalhe, o papel das representações gráficas e da visualização na aprendizagem da Análise, recorrendo a essas Tecnologias.

1.2. Problema do estudo

Este estudo tem como objectivo compreender os processos de aprendizagem do conceito de derivada, em contextos computacionais. Procurou estudar-se estes processos de um modo indissociavelmente ligado a metodologias de ensino. Como forma de conseguir esta interligação, utilizou-se uma metodologia de experiência de ensino, concretizada numa intervenção didáctica que envolveu alguns alunos de duas turmas de 12° ano de escolaridade, em horário extra-lectivo, de uma escola secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo 1994/95. O ensino e aprendizagem das derivadas de funções foi feito privilegiando uma abordagem gráfica e com recurso ao programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus*.

Foram levantadas as seguintes questões que serviram de referencial à observação feita:

1. Como é que os alunos determinam e utilizam o conceito de declive de uma recta?
2. Como determinam e compreendem o conceito de derivada de uma função num ponto?
3. Como relacionam o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada e vice-versa?
4. De que modo estas aprendizagens são influenciadas pelo contexto computacional escolhido?

1.2.1. Pertinência do estudo

O interesse de que o problema enunciado neste estudo se reveste prende-se com o tipo de competências matemáticas fundamentais de que os cidadãos terão necessidade para iniciarem a vida adulta no próximo milénio, numa sociedade caracterizada por mudanças muito frequentes e rápidas e em que a escolaridade é o princípio de uma longa escola que se prolongará por toda a vida.

O nosso mundo tecnológico está a mudar a uma velocidade cada vez maior, e a nossa responsabilidade em assuntos internacionais continua a aumentar. À medida que evoluem as necessidades da sociedade, assim se alteram as competências necessárias aos indivíduos para uma vida produtiva nessa sociedade. Todos os alunos, de todas as raças e ambos os sexos, necessitarão de competências em áreas fundamentais da Matemática.

Frases do tipo: *preparar para a mobilidade, desenvolver nos alunos a facilidade de comunicar com clareza e rigor, levar os alunos a investigar, a formular conjecturas*, encontram-se em todos os manuais com objectivos pedagógicos. A modernização terá de ser feita então, não só no que diz respeito a conteúdos programáticos, mas principalmente quanto a métodos de ensino.

Nos últimos anos, os matemáticos têm-se preocupado não só com o papel que a Análise ocupa no currículo, mas também com o tipo de Análise que é ensinado e como é ensinado. O debate central é a relação entre o desenvolvimento de competências e o desenvolvimento de conceitos. Muitos educadores matemáticos têm assinalado que a Análise se tem tornado muito mais um exercício de manipulação de símbolos e que precisamos de nos concentrar mais no desenvolvimento de conceitos e nas competências de resolução de problemas.

A introdução das tecnologias no ensino da Matemática tem intensificado este debate. Os estudos têm demonstrado que os computadores podem reduzir o tempo necessário para ensinar algoritmos, deixando mais tempo para o desenvolvimento de conceitos e resolução de problemas.

O ensino da Análise com a ajuda das tecnologias pode aumentar o desenvolvimento de referências visuais para aprender conceitos. Os alunos parecem confiar mais na manipulação de símbolos e outros modos analíticos de pensamento. Têm tendência a evitar considerações visuais (Vinner, 1989). No entanto, as considerações visuais são necessárias para a compreensão dos conceitos de Análise. A representação visual de funções, derivadas e integrais, não só tornam os conceitos mais concretos como permitem ver a relação entre esses conceitos. Ao resolver problemas com informação visual, os alunos aprendem não só a fazer traduções entre os modos de pensamento visual e analítico, mas também a raciocinar dentro de cada um destes modos de pensamento (Tall e Thomas, 1989).

O *software* com capacidades gráficas desempenha um papel importante no desenvolvimento de formas de pensamento visual nos alunos.

Na minha experiência como professora verifico que, muitas vezes, os alunos se movem através dos currículos da Matemática com pouca compreensão dos conceitos fundamentais do pensamento matemático. Memorizam fórmulas, algoritmos, e procedimentos no sentido de resolverem problemas rotineiros e obterem respostas correctas. Quando fazem um estudo exaustivo de uma função (domínio, contradomínio, zeros, intervalos de monotonia, extremos relativos, sinal) com o objectivo de, no final, obterem a sua representação gráfica desenvolvem procedimentos algébricos que, muitas vezes, por deficiências de cálculo, levam a representações gráficas que não se adaptam a todos os itens desse estudo algébrico. No entanto, continuam a aceitar como válidos os resultados obtidos por considerarem que utilizaram a abordagem matematicamente mais legal. Ao aspecto gráfico é dada uma atenção inferior e, muitas vezes, as provas gráficas não são consideradas válidas por muitos alunos.

O estudo das derivadas de funções do ensino secundário português tem consistido em expor aos alunos fórmulas, regras, e procedimentos para memorizar e praticar. Os alunos desenvolvem sistemas de mnemónicas que usam para decidir que fórmula é apropriada numa dada situação. A visualização, uma componente importante do pensamento matemático, tem sido raramente utilizada. Embora na Análise a derivada seja introduzida graficamente, a experiência confirma que estas representações gráficas são raramente sustidas. Além disso, o pensamento e a compreensão visual não são geralmente testados mesmo quando são apresentados na sala de aula.

Quer a nível nacional quer internacional são apresentadas várias alternativas (a que alguns alunos dificilmente aderem por não serem contempladas as regras ou algoritmos habituais) a um tipo de abordagem analítico do estudo das Funções, em geral, e do Cálculo Diferencial, em particular.

Nas Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991, p. 215) refere-se que: " O ensino [do Cálculo Infinitesimal] deve ser altamente exploratório e baseado em experiências numéricas e geométricas que capitalizem o uso da calculadora e do computador. As actividades devem ter em vista fornecer aos alunos bases conceptuais firmes para o cálculo infinitesimal, em vez do desenvolvimento de técnicas manipulativas".

Os autores dos Programas de Matemática partilham destas mesmas preocupações quando referem que: "A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, pretende preparar os alunos para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica" (DES, 1997, p. 8).

Estas considerações levam-nos a afirmar que, no panorama da actual Reforma do Sistema Educativo, é pertinente uma investigação que analise os processos desenvolvidos pelos alunos na construção do conceito da derivada e suas aplicações, nomeadamente quando se utilizam contextos didácticos que recorrem a ferramentas computacionais.

Esta investigação permite identificar e compreender situações relevantes que ocorrem nas aulas sobre Derivadas de Funções e, assim, pode fornecer informações acerca da organização de actividades de ensino e aprendizagem, de modo a possibilitar que os alunos desenvolvam capacidades na resolução de tarefas, nesta área.

Este estudo interessará às Ciências de Educação, uma vez que se tenta compreender os processos de aprendizagem dos alunos, quando recorrem a ferramentas que podem proporcionar uma mudança no sistema educativo.

1.2.1.1. Necessidade de mudança

A educação, como outros subsistemas sociais, enfrenta, hoje em dia, tempos de crise. Mas como afirma Morin (1984, p.115) "a crise é um momento indeciso e ao mesmo tempo decisivo, pois é na medida em que há incerteza que passa a haver possibilidade de acção, de decisão, de mudança, de transformação".

O papel mais importante dos responsáveis pela Educação consiste em incentivar modalidades de ensino que proporcionem uma base sólida para a educação e formação permanentes.

Carneiro (1988, p. 17), em relação ao Ensino Secundário, refere que: "o focus da escola passa a centrar-se na educação geral e na sólida aquisição de conhecimentos globais, técnicos e humanísticos, resistindo à especialização demasiado precoce condenada à obsolescência dos conhecimentos". Este autor refere também a necessidade de novos métodos pedagógicos que proporcionem aprendizagens mais ricas e gratificantes.

Os professores continuam a ser elementos fundamentais da mudança na medida em que, o que entra na sala de aula, passa obrigatoriamente por eles (Benavente, citada em Duarte, 1993).

A vida na sala de aula é um reflexo da vida da sociedade. A sala de aula manifesta muitos dos fenómenos sociais que estão ligados à vida da comunidade. Entre os alunos encontramos diferenças de aptidões, diferenças de *background*, diferenças de linguagem e compreensão assim como códigos sociais diferentes. Estes fenómenos têm que ser tomados em conta no nosso processo de ensino.

O maior objectivo do ensino da Matemática é dotar os alunos de capacidades que lhes permitam transferir os conhecimentos adquiridos, de um dado ambiente de aprendizagem para novos ambientes onde necessitem de aplicar esses mesmos conhecimentos.

"Hoje é necessária uma outra forma de conhecimento, um conhecimento compreensivo e íntimo que não nos separe e antes nos una pessoalmente ao que estudamos" (Santos, 1987, p. 53).

1.2.1.2. Necessidade de mudança no ensino e aprendizagem da Matemática

Para desempenhar, com eficiência, funções no próximo século, os alunos precisarão, de um conjunto mais vasto de competências matemáticas. Devem ser capazes de apresentar ideias matemáticas através da exposição oral ou escrita, através de desenhos e gráficos e de demonstração com modelos concretos; devem ser capazes de discutir Matemática e fazer perguntas sobre Matemática; devem saber formular conjecturas; devem ser encorajados a "pegar" em situações do dia-a-dia, transferi-las para representações matemáticas, explorá-las e interpretar os resultados obtidos à luz da situação inicial; devem planificar e executar a recolha e organização de dados para dar resposta a questões do seu dia-a-dia.

Os alunos necessitam explorar a Matemática utilizando materiais manipulativos, modelos, calculadoras e computadores. A utilização do computador deve orientar-se para um envolvimento significativo dos alunos na resolução de problemas e desenvolvimento de conceitos e desviar-se do treino de destrezas de baixo nível. É preciso, no entanto, ter presente que as Novas Tecnologias só por si não podem ser um veículo para a aquisição de conhecimento, capacidades e atitudes, mas têm que estar integradas em potentes ambientes de ensino-aprendizagem, ou seja, em situações que desencadeiem no aluno os processos de aprendizagem necessários para atingir os objectivos educacionais desejados (De Corte, 1992).

É urgente operar uma mudança de mentalidade radical e assumir uma prática pedagógica na Matemática que leve a um desenvolvimento destas competências.

O National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM, 1989) descreve as doze competências matemáticas fundamentais de que os cidadãos terão necessidade para iniciarem a vida adulta no século XXI e que têm sido um "farol", ao longo destes últimos anos, para o desempenho da minha actividade de professora de Matemática do Ensino Secundário.

Segundo estes investigadores, os alunos que hoje educamos deverão, muito provavelmente, mudar de actividade profissional várias vezes ao longo da sua vida. A fim de se prepararem para esta mobilidade, os alunos devem desenvolver uma profunda compreensão dos conceitos e princípios matemáticos; devem raciocinar com rigor e comunicar com clareza; devem reconhecer as aplicações matemáticas no mundo que os rodeia e devem enfrentar os problemas matemáticos com confiança. (...) os alunos devem aprender a investigar, por si próprios, as ideias matemáticas. Devem ser capazes de usar experiências e observações para formular conjecturas. (...) os alunos devem ser capazes de representar funções e relações, utilizando tabelas, gráficos e condições. (...) Para aprender a Matemática fundamental para o Século XXI, os alunos precisam de um ambiente sem medos no qual sejam encorajados a colocar questões e a correr riscos. (...) necessitam explorar a Matemática utilizando materiais manipulativos, instrumentos de medição, modelos, calculadoras e computadores.

Nas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991, p. 5) com o fim de reflectir a importância da alfabetização matemática de todos os cidadãos, são articulados cinco objectivos gerais para todos os alunos: "(1) que aprendam a dar valor à matemática; (2) que adquiram confiança na sua capacidade de fazer matemática; (3) que se tornem aptos a resolver problemas matemáticos; (4) que aprendam a comunicar matematicamente; e (5) que aprendam a raciocinar matematicamente".

Os autores dos Programas de Matemática não são alheios a estes desafios quando referem como finalidades da disciplina de Matemática no ensino secundário: "Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação no real; desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade; promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constituam suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa; contribuir para uma atitude positiva face à Ciência; promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade" (DES, 1997, p. 3).

Numa época em que a sociedade requer uma Escola como sendo um espaço de aprendizagem da comunicação e cooperação, um espaço de desenvolvimento de pessoas no sentido de serem capazes de resolver problemas de uma forma crítica e criativa, há que renovar o currículo da Matemática pondo a ênfase em actividades que coloquem os alunos em situações de reflexão e formulação de problemas.

Os autores dos Programas de Matemática do ensino secundário, partindo do pressuposto de que o aluno é o agente da sua própria aprendizagem, apontam uma metodologia em que: "os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas; os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização; se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural." (DES, 1997, p. 8).

Estes Programas contemplam, de forma clara, a grande necessidade da ligação da Matemática com a realidade. As actividades devem ser pensadas tendo em vista este importante objectivo educativo.

É então necessário, valorizar actividades que levem o aluno a conjecturar, experimentar, provar, desenvolver o espírito crítico e a criatividade, a ter uma atitude positiva face à ciência.

Pensar numa mudança do currículo da Matemática implica então pensar na mudança da aula de Matemática e no papel decisivo que aí podem desempenhar as Tecnologias de Informação.

"O computador entrará na aula de Matemática quer se queira quer não." (Veloso, 1988, p. 3). E acrescenta "O computador encorajará e ajudará o professor a descer do estrado e a ser, junto dos seus alunos, um animador de grupo, um exemplo de espírito crítico e um entusiasmado companheiro de descoberta" (Veloso, 1988, p. 7).

"A introdução das tecnologias da informação na Educação não pode, portanto, ser considerada *apenas* como uma mudança tecnológica. (...) A introdução das tecnologias da informação na educação *pode* estar associada à *mudança de como se aprende, à mudança das formas de interacção entre quem aprende e quem ensina, à mudança do modo como se reflecte sobre a natureza do conhecimento*" (Teodoro, 1992, p. 10).

Nas *Normas Profissionais para o ensino da Matemática* (NCTM, 1994, p. 2) defende-se que "os professores são os principais protagonistas na mudança dos processos pelos quais a Matemática é ensinada e aprendida nas escolas". São aconselhadas cinco mudanças no ambiente das aulas de Matemática:

- criação de salas de aula que sejam comunidades matemáticas — longe de uma aula como uma colecção de indivíduos;
- verificação dos resultados através da lógica e evidência — longe do professor como única fonte de autoridade;
- raciocínio matemático — longe da memorização de técnicas;
- formulação de conjecturas, invenção, resolução de problemas — longe da mecanização de processos de resolução;
- procura de conexões matemáticas — longe da procura de conceitos e procedimentos isolados.

A preocupação pedagógica do nosso estudo está espelhada nos quatro pressupostos em que se baseiam as *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (NCTM, 1994, p. 23):

"1. O objectivo do ensino da Matemática é ajudar todos os alunos a desenvolver poder matemático;
2. O QUE os alunos aprendem está fundamentalmente relacionado com o modo COMO o aprendem;
3. Todos os alunos podem aprender a pensar matematicamente.
4. Ensinar é uma prática complexa e, consequentemente, não é redutível a receitas ou prescrições."

1.2.2. Linha metodológica

Os objectivos desta investigação apontam para a caracterização e compreensão de um cenário educacional, com uma ênfase especial nos processos de pensamento desenvolvidos pelos alunos. Optou-se, por isso, por uma metodologia de natureza qualitativa. Como afirma Merriam (1988), a investigação qualitativa tem como preocupação dominante os processos e não os resultados ou produtos. A investigação descritiva é utilizada quando se pretende uma descrição e explicação em vez da predição com base na causa e no efeito.

Pretendendo caracterizar processos desenvolvidos pelos alunos através de uma observação directa e participante, mais do que avaliar os efeitos da intervenção optou-se por uma abordagem metodológica da família das experiências de ensino que, de acordo com Lesh, Amit e Kelly (citados em Junqueira, 1995, p. 18) são "*estudos longitudinais do desenvolvimento conceptual no seio de ambientes matemáticos ricos*, através dos quais é possível simultaneamente estimular, facilitar, e investigar a evolução do conhecimento particular e de capacidades".

Foi feita uma observação sistemática de alguns dos alunos de duas turmas do 12° Ano de escolaridade de uma escola dos arredores de Lisboa, enquanto desenvolviam actividades da unidade Derivadas de Funções utilizando ferramentas computacionais, em horário extra-lectivo.

O *corpus* de análise é constituído pela observação directa de três pares de alunos durante o desenvolvimento de dez fichas de actividades. Estas aulas foram audio e vídeo gravadas e posteriormente transcritas. O *corpus* de análise incluiu ainda dados das entrevistas não estruturadas realizadas aos alunos, dos registos do diário da investigadora, das fichas que os alunos desenvolveram e dos dois últimos testes escritos, das observações das restantes aulas sobre o tema derivadas de funções. Os dados foram tratados de acordo com a técnica de análise de conteúdo (Vala, 1986). Tendo em atenção os objectivos do estudo, fizeram-se as categorias de análise (Bardin, 1977) que poderiam fornecer uma resposta às questões de investigação.

O acompanhamento directo dos três grupos de alunos criou condições para uma descrição mais rica dos processos cognitivos dos alunos, permitindo acompanhar a evolução dos seus raciocínios.

1.2.3. Estrutura organizativa

O trabalho está organizado em nove capítulos. A este capítulo de Introdução segue-se o capítulo 2, da revisão de literatura.

O capítulo 3 apresenta o Plano metodológico da investigação.

O capítulo 4 descreve a experiência de ensino.

Nos capítulos 5, 6, 7 e 8 faz-se a apresentação da análise de dados, descrevendo, analisando e interpretando os processos utilizados pelos alunos no desenvolvimento das actividades propostas.

No capítulo 9, tecem-se as conclusões do estudo, apontam-se algumas das possíveis implicações e caminhos para futuras investigações.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Neste capítulo, apresentamos um quadro de referência teórico relativo às principais questões desta investigação. Está dividido em quatro secções: (1) Conceito de função; (2) Representação gráfica e visualização; (3) Compreensão dos conceitos de Análise pelos alunos; e (4) Ensino/aprendizagem em ambiente computacional.

O conceito de derivada é construído sobre as intuições e imagens que os alunos têm do conceito de função, pelo que começaremos por discutir esse conceito.

O papel da representação gráfica e da visualização é imprescindível numa experiência de ensino com ênfase numa abordagem gráfica das questões.

A compreensão dos conceitos de Análise (declive de uma recta, taxa de variação, limite, secantes, tangentes e derivada) decorrem directamente das questões do estudo.

A experiência de ensino foi desenvolvida em ambiente computacional pelo que discutiremos o ensino e aprendizagem nesse ambiente.

1. Conceito de função

O conceito de função é um dos tópicos centrais da Matemática. É um conceito complexo, devido aos numerosos subconceitos que lhe estão associados (Dreyfus e Eisenberg, 1982; Schwarz *et al.*, 1990; Eisenberg, 1994).

O significado de função tem evoluído ao longo dos anos. Até meados do século XX, uma função era considerada como uma mudança ou como uma variável dependendo de outras variáveis. Duas variáveis podiam estar tão relacionadas que a mudança no valor de uma produzia uma mudança no valor da outra. Nesse caso, a segunda variável dizia-se função da primeira (Markovits *et al.*, 1986). A definição moderna de função é baseada na noção de um subconjunto especial do produto cartesiano de dois conjuntos. Este conceito moderno de função, que pode ser chamado de conceito de Dirichlet-Bourbaki, é o de uma correspondência entre dois conjuntos não vazios que faz corresponder a cada elemento do primeiro conjunto, exactamente um elemento do segundo conjunto (Vinner e Dreyfus, 1989).

Embora a abordagem de função de Dirichlet-Bourbaki seja frequentemente apresentada nos livros de texto, os exemplos usados para ilustrar o conceito são usualmente e, por vezes, exclusivamente funções cuja regra de correspondência é dada através de uma fórmula. Este costume pode levar os alunos a construírem imagens baseadas na aparência de uma fórmula, embora a sua definição de função possa continuar a ser a de Dirichlet-Bourbaki. Assim, quando se pergunta a definição de função, um aluno pode usar a definição de Dirichlet-Bourbaki mas, quando trabalha na identificação ou construção de tarefas relacionadas com o conceito de função, o seu comportamento pode ser baseado na concepção da função como uma fórmula.

Esta visão é consistente com os trabalhos de Ferrini-Mundi e Lauten (1993), que referem que várias investigações têm mostrado que a maioria dos alunos considera como função uma regra de correspondência representada por uma fórmula. Esta concepção dos alunos é muito forte e pode estar na origem das grandes dificuldades que manifestam quando trabalham, por exemplo, com funções definidas por ramos, por não terem a mesma regra de correspondência em todo o seu domínio. Estas investigadoras acrescentam ainda que, de uma maneira geral, representações gráficas de funções, apresentadas aos alunos sem fórmulas, não são classificadas por estes como funções devido à ausência de fórmulas específicas. A intuição dos alunos sobre o que constitui uma função parece estar mais relacionada com os exemplos de funções que encontraram inicialmente, do que com a sua definição formal. Isto é, os alunos, de uma maneira geral, pensam que as funções devem ser lineares ou, pelo menos, contínuas, regulares e definíveis por uma fórmula simples. Ferrini-Mundi e Lauten recomendam que, para os ajudar a construir um conceito mais completo de função, se introduzam exemplos simples de funções, bem como contra-exemplos.

Esta forte tendência dos alunos associarem funções com fórmulas pode ser indicativa de uma concepção operacional (o aluno pode entender uma fórmula como uma pequena descrição de um algoritmo de cálculo) ou de uma concepção estrutural (a fórmula pode ser interpretada como uma relação estática entre pares ordenados).

Vinner e Dreyfus (1989) fizeram um questionário a 271 alunos universitários e 36 futuros professores de Matemática israelitas, para investigar quais as imagens e definições que esses alunos tinham do conceito de função. As respostas dadas para a definição de função foram divididas em seis categorias: uma correspondência, uma relação de dependência, uma regra, uma operação, uma fórmula e uma representação. A maioria das respostas inclinou-se igualmente para as duas primeiras categorias — uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que atribui a todos os elementos do primeiro conjunto exactamente um elemento do segundo conjunto — e uma relação de dependência — y depende de x. Quando se pediu que utilizassem a sua definição de função para identificar se determinados gráficos representavam ou não funções e que representassem funções com propriedades específicas, os alunos deram justificações em que evocaram a unicidade, descontinuidade num ponto, domínios separados e pontos críticos. Entre os alunos que conseguiram identificar correctamente um dado gráfico como representando ou não uma função, a principal justificação dada foi a da unicidade, para cada valor do domínio havia exactamente um valor no conjunto de chegada. Quando os alunos rejeitaram determinados gráficos como não representando funções, usaram argumentos como a descontinuidade do gráfico, a divisão do seu domínio, isto é, duas ou mais expressões simbólicas, a existência de um ponto crítico que não se ajustava a uma fórmula particular que descrevesse o resto do gráfico. Vinner e Dreyfus concluíram que, quando se pede a definição de função, os alunos podem dar uma resposta completamente formal e abstracta (a definição de Dirichlet-Bourbaki), mas que voltam ao comportamento determinado pela concepção da fórmula, quando estão a trabalhar na identificação ou construção de tarefas. Os autores atribuem este comportamento inconsistente a uma compartimentação do conhecimento. Como conclusão deste estudo, Vinner e Dreyfus interrogam-se da necessidade de apresentar a definição de função de Dirichlet-Bourbaki em determinados cursos, e consideram que, quando se torna necessário estudar funções descontínuas, funções definidas por ramos, funções com pontos excepcionais, ou outras funções estranhas, estas devem ser consideradas no sentido de alargar experiências anteriores dos alunos. Recordam ainda que um conceito não é adquirido num passo. Vários estádios precedem a aquisição completa e o domínio de um conceito complexo.

Outras investigações sobre conceitos relacionadas com funções indicam que os alunos constroem o conceito formal de função através de estádios (Wagner e Parker, 1993). No início, começam por considerar função como uma regra — isto é, o que fazer com x. Num estádio superior, o conceito de função é considerado em vários outros contextos — tabular, gráfico e simbólico. Os alunos adquirem capacidades que lhes permitem moverem-se entre esses contextos. Num último estádio, uma função é considerada como um objecto matemático que tem as suas propriedades. Neste estádio, o aluno é capaz de trabalhar com transformações e composição de funções. Thomas (citado em Fiske, 1994) identificou algumas dificuldades manifestadas pelos alunos em progredir nestes estádios. As dificuldades ocorrem quando se torna necessário fazer conexões entre as múltiplas representações de funções e quando uma função começa a ser tratada como um objecto matemático.

1.1. Ensino e aprendizagem do conceito de função

Como introduzir o conceito de função?

Vários especialistas em educação matemática defendem que o ensino do conceito de função deve caminhar do menos formal, menos abstracto, mais global e intuitivo, para o formal.

O ensino que começa com a apresentação formal da definição abstracta de função de Dirichlet-Bourbaki requer que os alunos aprendam uma definição separada do pensamento funcional que trazem do exterior da aula de Matemática onde, uma quantidade varia com, ou depende de uma outra (Borba, 1993). Mas os alunos possuem intuições sobre funções e construção de gráficos, das suas experiências do dia-a-dia e da sua educação matemática formal passada. Assim, um modo possível de começar, apresentado por Mansfield (citado em Leinhardt *et al.*, 1990), é o baseado no próprio conhecimento dos alunos.

Pode introduzir-se o conceito de função a partir da interpretação de gráficos cartesianos de funções, em vez de se começar pelos diagramas de setas, uma vez que, a simplicidade inicial deste tipo de gráficos pode prejudicar desenvolvimentos posteriores do conceito de função (Janvier, 1978).

Bergeron e Herscovics (citados em Leinhart *et al.*, 1990) aconselham começar com tarefas intuitivas sobre funções e, só mais tarde, fazer uma abordagem abstracta e formal do conceito. A sequência sugerida por estes autores é da representação gráfica para a representação analítica, ao contrário do que se passa nos currículos tradicionais em que, de uma maneira geral, a sequência é no sentido inverso.

Pode começar-se o estudo das funções pela construção de gráficos de fenómenos qualitativos, a partir das intuições que os alunos têm sobre esses fenómenos. Pode começar-se, por exemplo, com uma variável familiar, tal como o tempo ou com uma variável dependendo do tempo. Na realidade, o uso mais comum das funções ocorre precisamente ao modelar situações do mundo real. Destas, a modelação do movimento com o tempo como variável independente é especialmente importante (Selden e Selden, 1992).

Janvier (1978) foi dos primeiros investigadores a alertar para o facto de que o ensino que diz respeito ao estudo de gráficos de funções se tem focado excessivamente em competências quantitativas, abstractas e localizadas. O autor defende que os alunos deviam analisar primeiro gráficos qualitativos de situações concretas e que lhes deveriam ser colocadas questões no sentido de os levar a olhar para o gráfico globalmente, em vez de o lerem pontualmente. Esta abordagem mais qualitativa tem a vantagem de apelar ao senso comum e às intuições mais frequentes (Goldenberg, 1988).

Surge, assim, a necessidade de levar os alunos a descobertas que, apelando à intuição, os ajudem a formar representações mentais que sirvam de suporte à transição para um pensamento matemático mais elaborado.

1.1.1.Intuições no estudo das funções

Segundo Sebastião e Silva (1977, p. 84), "... a intuição precede geralmente a lógica, no processo de criação matemática. E o ensino deve respeitar esta ordem, se não quisermos abafar no aluno o espírito de pesquisa, obrigando-o a admirar passivamente (ou a detectar) uma construção acabada e perfeita".

O termo intuição é, normalmente, utilizado para referir representações mentais de factos que parecem evidentes por si mesmos. São características do conhecimento dos alunos que resultam da experiência do dia-a-dia e que, geralmente, existem antes de um ensino formal específico.

A palavra intuição não é um termo claramente definido. Tem uma variedade de significados e abordagens (comportamento intuitivo na resolução de problemas, pensamento intuitivo versus pensamento analítico, intuição nos diagnósticos clínicos, intuição como apreensão imediata de crenças justificáveis, intuição como inferência inconsciente) (Fischbein *et al.*, 1981). Apesar da variedade de conotações, há um atributo que parece ser comummente aceite, a urgência dessa forma de conhecimento. Fischbein (citado em Tall, 1994) destaca dois tipos de intuições: intuições primárias — referem-se às convicções cognitivas que se desenvolvem no ser humano, de um modo natural, antes e independentemente do ensino sistemático; intuições secundárias — desenvolvem-se como resultado de um treino intelectual sistemático.

Um primeiro objectivo da educação deveria ser aumentar nos alunos a base das suas intuições (Dreyfus e Eisenberg, 1982). Quando é abordado um novo tópico, o ensino deve ter como base o conhecimento intuitivo dos alunos.

Os matemáticos olham, mutas vezes, para os termos "intuição" e "rigor" como sendo reciprocamente exclusivos e sugerindo que uma explicação intuitiva carece necessariamente de rigor (Tall, 1994). Este investigador refere ainda que a oposição entre os dois conceitos é uma falsa dicotomia. A intuição é o produto do conceito imagem do indivíduo. Os alunos passam das intuições iniciais baseadas nas suas matemáticas pré-formais, para intuições mais formais, à medida que a sua experiência vai crescendo.

Os alunos, de uma maneira geral, lidam melhor com gráficos de funções em que uma das variáveis é o tempo. A familiaridade com o tempo mais do que a sua natureza unidireccional parece ser responsável por isso. As conclusões sobre a elevada capacidade dos alunos na construção e interpretação de gráficos em que uma das variáveis é o tempo, parecem suportar, empiricamente, a noção de que as intuições baseadas no conhecimento de situações do mundo real, têm uma influência importante no raciocínio dos alunos.

É preciso, no entanto, estar atento ao facto de que, muitas vezes, as intuições podem originar nos alunos aquilo a que a literatura chama de *misconceptions* e que no presente estudo traduziremos por concepções erróneas.

1.1.2. Concepções erróneas sobre funções e gráficos

Muitas vezes, as compreensões dos alunos são bem elaboradas e firmemente defendidas, ainda que não sejam esperadas porque são diferentes das compreensões tradicionais. Estes pontos de vista não tradicionais nos alunos são chamados concepções erróneas (Ferrini-Mundi e Lauten, 1993).

Uma concepção errónea pode desenvolver-se como resultado de uma tendência para generalizar uma concepção essencialmente correcta, ou pode ser devida à interferência do conhecimento do dia-a-dia. As concepções erróneas podem ser originadas por intuições (por exemplo, tendência dos alunos em fazerem interpretações icónicas de gráficos), ou podem ser o resultado de aprendizagens incompletas na sala de aula (por exemplo, tendência dos alunos para reconhecerem apenas as correspondências *um-a-um* como representando funções).

Na aprendizagem de certos conceitos chave do currículo, os alunos transformam, de um modo activo, o que lhes foi dito e essas transformações levam-nos, por vezes, a essas concepções.

Analisaremos aqui algumas destas concepções, no que diz respeito às funções e gráficos.

O que é ou não é uma função — Em muitos casos, os alunos sabem a definição formal de função, mas falham a aplicá-la quando têm que decidir se um gráfico representa ou não uma função (Vinner, 1983). A maior parte dos exemplos que são apresentados aos alunos são funções cujas regras de correspondência são dadas a partir de fórmulas que produzem modelos óbvios ou fáceis de detectar quando representados graficamente (Leinhardt, 1990). Assim, os alunos ficam com a ideia de que apenas os gráficos "modelos" representam funções, os outros parecem estranhos, artificiais. A crença implícita de alguns alunos de que, para falarem de uma função, uma mudança na variável independente deve ser seguida de uma mudança na variável dependente pode originar, nesses alunos, uma concepção de que as funções constantes não são funções legítimas (Markovits *et al.*, 1986). Uma explicação para esta concepção é o facto de alguns livros apresentarem os conceitos de variável e constante como opostas, ou ainda, o facto de os alunos não aceitarem correspondências de "*muitos-para-um*". Esta confusão de "*muitos-a-um*" com "*um-a-muitos*" pode resultar do facto de que, em diagramas de setas, os alunos contam, muitas vezes, as setas em vez dos elementos dos conjuntos e, frequentemente, consideram funções apenas as correspondências bijectivas. Esta concepção pode resultar de uma exigência implícita de simetria (Vinner,1983; Vinner e Dreyfus, 1989).

Preferência pela linearidade — Certas investigações têm sugerido que os alunos possuem uma visão restrita das formas que os gráficos e funções podem tomar (Lovell, citado em Leinhart *et al.*, 1990; Vinner e Dreyfus, 1989). Alguns alunos precisam de um modelo linear para reconhecer o gráfico de uma função. Esta preferência dos alunos pela linearidade pode ser explicada pelo facto de que a primeira família de funções que estudam são funções lineares. Outros alunos mostram mais tolerância por funções não lineares, mas precisam de outra forma "razoável", tal como a continuidade, a simetria, seja sempre crescente ou sempre decrescente, etc.

No estudo levado a cabo por Markovits *et al.* (1986), quando foi pedido aos alunos que dessem exemplos de funções que "passassem" por dois pontos, eles desenharam, quase sempre, gráficos lineares. O mesmo se passou no desenvolvimento de tarefas em que se pedia o gráfico de uma função que "passava" por mais do que dois pontos (os alunos ligaram dois pontos consecutivos com uma linha recta). Além disso, quando se perguntou aos alunos se por esses pontos podiam passar outros gráficos, eles responderam, manifestando uma certa convicção, que não, acrescentando que apenas uma linha recta podia passar por dois pontos.

Karplus (citado em Dreyfus, 1990) pediu aos alunos que fizessem interpolações entre pares de valores dados numa tabela que não exibia qualquer tipo de linearidade. Os valores da tabela resultavam de contextos reais tais como, por exemplo, a população de bactérias em crescimento. Muitos alunos do ensino superior, para desenvolver a tarefa usaram interpolações lineares quer no cenário gráfico quer no algébrico.

Problemas semelhantes foram observados com alunos portugueses, por Ponte (1985), a partir das respostas dadas a um teste por alunos de quatro turmas, duas do 10° ano e duas do 11° ano. Um dos objectivos do trabalho deste investigador era "Estudar as capacidades dos estudantes e os processos por eles utilizados na resolução de problemas envolvendo gráficos e raciocínio funcional, nomeadamente: — com que nível de sucesso e rigor executam problemas de interpolação e extrapolação" (p. 235). Ponte concluiu que os processos e dificuldades evidenciados pelos alunos portugueses são semelhantes aos dos alunos dos outros países, nomeadamente a sua preferência pela linearidade.

Ponte (1984) refere que alguns dos alunos americanos envolvidos no seu estudo representaram situações que correspondiam a formas de variação não linear através de uma linha recta. Segundo este autor, a linearidade não pareceu ser apenas uma estrutura conceptual geométrica mas também um modelo global de raciocínio.

Confusão entre declive e altura. No contexto gráfico, a confusão entre declive e altura foi observada em algumas investigações (Clement, 1989; Monk, 1992; Nemirovsky e Rubin, 1992; McDermott et *al.* (citados em Leinhardt et *al.*, 1990)). Esta confusão verifica-se, quer em tarefas de interpretação, quer de construção de gráficos.

Perante a questão: "qual dos objectos **A** ou **B** se desloca com maior velocidade no instante t = 2s?" (figura 2.1), a maior parte dos alunos afirmou que era o objecto **A**. A resposta sugere que os alunos se referem à posição da imagem de **A** relativamente à de **B**, não tendo em atenção que o declive da recta **A** é menor que o declive da recta **B**.

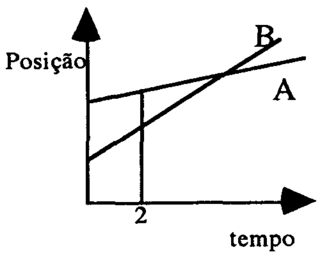


Fig. 2.1 - Numa investigação conduzida por vários investigadores, os alunos confundiram declive com altura

Podemos considerar duas fontes possíveis para esta concepção: uma representacional ("mais alto" num gráfico quer dizer "mais", ou o declive de uma recta não é uma noção significativa para os alunos) e outra conceptual (posição e velocidade não são noções distinguidas adequadamente), (Clement, 1985; Janvier, 1978).

Interpretação icónica. Leinhardt, Zalavsky e Stein (1990) utilizam o termo interpretação icónica para definir aquilo que outros investigadores denominam de interpretação pictorial.

As conclusões de um certo número de investigações sublinham o facto de que alguns alunos, por vezes, interpretam um gráfico de uma situação como traduzindo o desenho dessa situação. Os gráficos que representam viagens são, muitas vezes, interpretados como traduzindo a trajectória da jornada (Janvier, 1987).

Kerslake (citado em Leinhardt et *al.*, 1990) deu exemplos de como a aparência visual de certos gráficos se pode afastar da natureza da informação que os gráficos contêm. Em relação aos gráficos da figura 2.2, perguntava-se qual deles representava um passeio e pedia-se aos alunos que descrevessem o que acontecia em cada caso. Kerslake afirma que, de uma maneira geral, os alunos confundiam o gráfico com a trajectória do caminho.

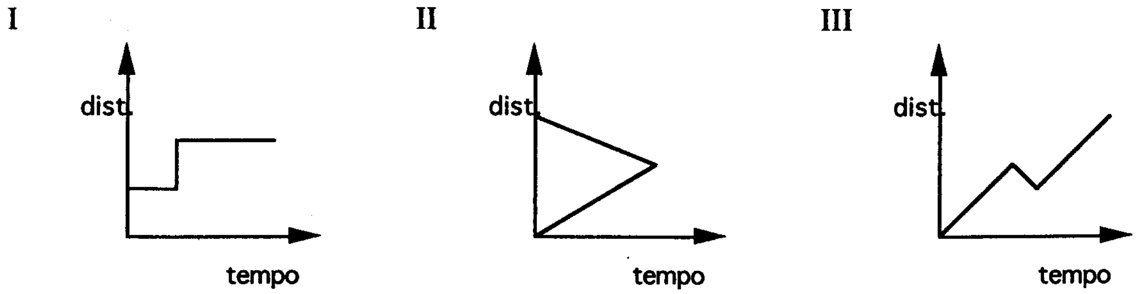


Fig. 2.2 - Os alunos confundem o gráfico com a trajectória do caminho (Kerslake, citado em Leinhardt et *al.*, 1990, p. 39)

Em relação ao primeiro gráfico, os alunos afirmaram: "andar ao longo de..., subir e caminhar"; "subindo uma parede vertical"; "andar para Este, depois para Norte, depois para Este. Em relação ao gráfico II: "Indo para Nordeste e depois para Noroeste". O gráfico III foi, muitas vezes, interpretado como: "subir uma montanha, depois descer e subir de novo"; "Subindo uma montanha".

Perante um gráfico de velocidade versus distância percorrida por um carro numa pista, onde se pretendia que os alunos identificassem o número de curvas da pista, muitos alunos não tiveram em consideração o facto da velocidade diminuir nessas curvas e contaram as curvas a partir da oscilação do gráfico (Janvier, 1978).

Uma concepção errónea muito comum na interpretação de gráficos ocorre quando se pede aos alunos que desenhem ou seleccionem um gráfico da velocidade de um ciclista subindo uma montanha — quer com uma figura de uma montanha ou com uma descrição verbal. Tipicamente, a escolha preferida é um gráfico com a forma de uma montanha (Kaput, 1987).

Clement (1989) chamou a atenção para dois tipos de erros que os alunos fazem muitas vezes com gráficos de situações reais: erros de correspondência local e erros de correspondência global.

Em relação ao gráfico da figura 2.3, muitos alunos afirmaram que os dois carros representados no gráfico se cruzavam quando os gráficos se intersectavam. Clement concluiu que os alunos indicaram um aspecto visual local do problema.

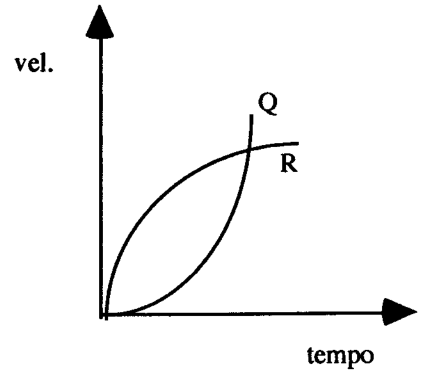


Fig. 2.3 - Gráfico da investigação de Clement (1989, p. 83)

Quando Clement pediu aos alunos que traçassem um gráfico da velocidade versus tempo de uma bicicleta caminhando ao longo de uma montanha, muitos alunos traçaram o gráfico representado na figura 2.4, com a forma de uma montanha. Os alunos têm uma concepção de que o gráfico é um desenho, um esboço da situação.

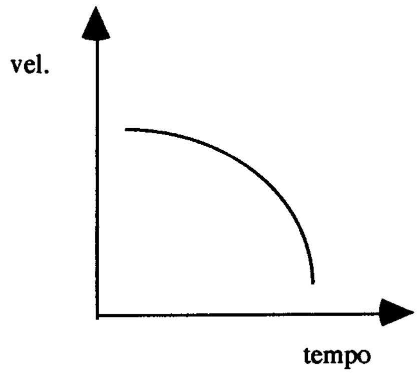


Fig. 2.4 - Gráfico da investigação de Clement (citado em Leinhardt et *al.*, 1990, p. 41)

Vencer esta dificuldade depende, em parte, da capacidade de experienciar relações entre duas variáveis representadas por um gráfico cartesiano.

Segundo Clement, os alunos manifestam mais dificuldades em interpretar conceitos que surgem de variáveis não visíveis no gráfico. Exibem mais concepções erróneas, por exemplo, num gráfico de distância-tempo (onde a velocidade é uma taxa "criada" pela combinação de distância e tempo) do que num gráfico que mostra explicitamente a relação entre velocidade e tempo (isto é, com o tempo no eixo dos xx e a velocidade no eixo dos yy).

Utilização de múltiplas representações. Por vezes, os alunos manifestam concepções erróneas quando fazem traduções entre as diferentes representações de funções, principalmente na tradução analítica de uma função representada graficamente.

Janvier (1987d) chamou a atenção para os processos psicológicos envolvidos nas mudanças de representações. As traduções têm uma direcção. Por exemplo, a tradução de uma função, da representação analítica para a representação gráfica, envolve processos psicológicos diferentes da tradução inversa. O movimento do gráfico para a equação que lhe corresponde, pode ser uma tarefa mais difícil porque envolve a procura de modelos, enquanto que, traçar o gráfico a partir de uma equação envolve uma série de passos relativamente fáceis, que são: gerar pares ordenados, marcá-los num referencial e ligá-los por uma linha.

Num estudo que envolveu 400 alunos do ensino secundário, Dunham e Osborne (citados em Fiske, 1994) concluíram que os alunos, de uma maneira geral, não têm sucesso quando tentam fazer conexões entre as representações analítica e gráfica de uma função, por não terem em conta os seus atributos críticos e, por vezes, por não conseguirem inferir características globais dessa função.

Num estudo que envolveu alunos portugueses do 10º ano, Domingos (1994) não identificou esse tipo de dificuldades. A principal abordagem que os alunos fizeram ao longo do estudo das funções foi o recurso à representação gráfica em computador, a partir da concretização das constantes na representação algébrica. Segundo Domingos, os alunos trabalharam num ambiente em que as ligações entre as representações eram tão fortes, que houve dificuldade em isolar cada uma dessas representações. Assim, todos os alunos conseguiram bons desempenhos na tradução entre as representações. Na tradução da representação algébrica para a gráfica, os alunos atribuíram características gráficas às constantes da representação algébrica. A tradução da representação gráfica para a algébrica foi feita com base nos pontos onde o gráfico cortava os eixos coordenados.

1.2. Diferentes abordagens do conceito de função

Uma função é um conjunto de pares ordenados tal que..., uma função é uma correspondência entre dois conjuntos de elementos que...— hoje, são estas palavras que introduzem o conceito de função aos alunos do ensino secundário, em muitas partes do mundo. De acordo com Sfard (1992), trata-se de uma abordagem estrutural que pode ser a fonte de sérias dificuldades na sala de aula. Em muitos casos, a chave do problema pode estar na incapacidade dos alunos criarem, por eles, estes objectos abstractos sobre os quais o professor fala com muita confiança. Para alguns alunos, não só o conceito de função, mas também as noções básicas de conjunto e elemento podem estar demasiado imprecisas e amorfas para serem usadas com confiança e operar com elas. Sfard (1992) formula dois princípios didácticos: (i) os novos conceitos não deviam ser introduzidos em termos estruturais e (ii) não devia ser exigida uma concepção estrutural até que os alunos precisassem dela. É típico do processo de aprendizagem que a concepção operacional preceda a concepção estrutural. Quando está para ser aprendido um novo conceito espera-se, da parte dos alunos, uma capacidade para pensar nele como um processo, antes que tenha sido adquirida a capacidade de o considerar como um objecto.

A investigação sobre o conceito de função exibe duas áreas principais de problemas inter-relacionados: (a) discrepância entre a definição matemática do conceito, o conceito definição que os alunos sabem, e o conceito imagem que os alunos usam quando tratam um problema; e (b) dificuldade em ir além de considerar uma função como uma regra operacional e compreendê-la como uma entidade singular, um objecto matemático (Dreyfus, 1990).

Apresentam-se, em seguida, duas teorias a considerar aquando do ensino do conceito de função. A primeira, desenvolvida por Vinner (1983, 1989, 1992), tem como chave da avaliação da compreensão adquirida pelos alunos, a distinção entre "conceito definição" formado pelas palavras utilizadas para descrever o conceito e o "conceito imagem", que é a estrutura cognitiva que existe na mente de cada indivíduo e que está relacionada com o conceito. A segunda abordagem é desenvolvida por Sfard (1987, 1989, 1991 e 1992) e tem por base do ensino do conceito de função um modelo que privilegia uma abordagem operacional do conceito antes de desenvolver uma concepção mais estrutural desse mesmo conceito.

1.2.1. Conceito imagem e conceito definição de função

Todos os conceitos matemáticos, excepto os primitivos, têm definições formais. Muitas destas definições são introduzidas aos alunos numa ou noutra altura. Os alunos, por outro lado, não usam necessariamente a definição quando decidem se um dado objecto matemático é um exemplo ou um contra-exemplo de um conceito. Na maior parte dos casos, decidem com base no conceito imagem, isto é, o conjunto de todas as imagens mentais (por imagens mentais queremos dizer qualquer espécie de representação — figura, forma simbólica, diagrama, gráfico, etc.), associadas na mente do aluno com o nome do conceito, junto com todas as propriedades que as caracterizam. A imagem é o resultado das experiências dos alunos com exemplos e contra-exemplos do conceito. Assim, o conjunto de objectos matemáticos considerados pelos alunos como exemplos de um conceito não é, necessariamente o conjunto de objectos matemáticos determinados pela definição.

As definições criam, muitas vezes, um sério problema na aprendizagem da Matemática e representam, mais do que qualquer outra coisa, o conflito entre a estrutura da Matemática e os processos cognitivos da aquisição do conceito (Vinner, 1992). Este autor levanta algumas questões de crucial importância: os alunos usam as definições enquanto trabalham certas tarefas matemáticas? São os seus conceitos imagem coerentes com os seus conceitos definição? O que é que é dominante enquanto os alunos trabalham tarefas matemáticas: o conceito imagem ou o conceito definição? Até que ponto os alunos fazem uma compartimentação do conhecimento?

É interessante observar os estudos que mostram existir algumas discrepâncias entre o que os alunos afirmam ser uma função, o seu conceito definição de função e o conceito que eles usam quando resolvem problemas, o seu conceito imagem (Vinner, 1983; Vinner e Dreyfus, 1989). Um aluno pode recordar-se muito bem da definição de função como um traçado gráfico ou como uma correspondência e dizer isso quando se lhe pergunta a definição, mas procede de um modo inconsistente ou mesmo contraditório com esta definição geral, quando se lhe pede para identificar se determinados gráficos representam ou não funções. Os autores atribuem este comportamento inconsistente à compartimentação do conhecimento. Vinner (1983) sugere que, nestes casos, o conhecimento dos alunos da definição formal está separado do seu conceito imagem — um conceito do que é uma função, desenvolvido através da experiência com exemplos e contra-exemplos de funções.

Num estudo levado a cabo por Vinner, em escolas de Jerusalém, o conceito de função foi ensinado com base na definição de Dirichlet-Bourbaki (correspondência entre elementos de dois conjuntos não vazios) e foram dados exemplos para ilustrar esse conceito. Quando, um ano mais tarde, se pediu a esses alunos que definissem função, 57% utilizaram essa definição ou uma reformulação própria. No entanto, apenas 34% dos 57% utilizaram essa definição quando foi preciso servir-se dela na resolução de situações funcionais. Os restantes alunos confiaram nos seus conceitos imagem, que não eram coerentes com a definição de Dirichlet-Bourbaki.

Adquirir um conceito significa formar um conceito imagem para esse nome mas saber de cor a definição de um conceito não garante a sua compreensão. Muitas vezes, o conceito imagem pode ser inteiramente moldado por alguns exemplos e pode não fornecer o conceito definição (Vinner, 1992). O conceito definição pode, muitas vezes, permanecer inactivo e pode mesmo ser esquecido (Vinner, 1983). Assim, de acordo com o autor, para manipular os conceitos precisamos do seu conceito imagem. O processo de pensamento é guiado pelo conceito imagem. Os alunos devem ser confrontados com exemplos e contra-exemplos dos conceitos, antes de surgirem definições desses mesmos conceitos.

1.2.2. Transição de uma concepção operacional para uma concepção estrutural do conceito de função

As noções abstractas tais como as de número e função podem ser concebidas de dois modos diferentes: estruturalmente (como objectos) ou operacionalmente (como processos), como sugeriu Sfard (1991). A investigadora apresentou a distinção entre as duas abordagens do seguinte modo: ver uma entidade matemática como um objecto significa ser capaz de se referir a ela como se fosse uma coisa real — uma estrutura estática, existindo algures no espaço e tempo. Em contraste, interpretar uma noção como um processo implica olhar para ela como um potencial mais do que como uma entidade, que se torna existência apenas a partir de uma sequência de acções. Assim, enquanto a concepção estrutural é estática e integrativa, a operacional é dinâmica e detalhada. Sfard defende que a concepção operacional é, para a maioria das pessoas, o primeiro passo na aquisição de noções matemáticas. De acordo com esta autora, a transição de uma concepção operacional para uma concepção estrutural, não é realizada nem rapidamente nem sem alguma dificuldade. No entanto, afirma Sfard, as duas concepções têm um papel importante na actividade matemática.

Segundo Sfard (1992), a transição de uma concepção operacional para uma concepção estrutural desenvolve-se, normalmente, através de três estádios: interiorização, condensação e reificação. Interiorização é o processo realizado nos objectos que já são familiares. A condensação é a capacidade de tratar um dado processo em termos de entrada de informação e apresentação de resultados, sem considerar necessariamente os seus passos intermédios. A reificação converte o processo já condensado, num objecto, numa entidade. O facto de um processo ter sido interiorizado e condensado como uma entidade, não significa, por si, que uma pessoa tenha adquirido a capacidade de pensar nele de um modo estrutural. Sfard vê a interiorização e a condensação como processos graduais e a reificação como um salto qualitativo rápido — é o fenómeno do Aha! Os objectos abstractos que vêm da reificação fornecem eficiência cognitiva; uma grande quantidade de informação é acondicionada numa entidade simples, o que leva a num esforço cognitivo menor e a uma resolução de problemas mais efectiva.

As concepções operacionais e estruturais são complementares. Ambas são necessárias e usadas no processo de aprendizagem e na resolução de problemas (Sfard, 1992). Os objectos abstractos estão para os processos como as figuras e símbolos para as descrições verbais: meios de alcançar um grande número de dados de uma só vez.

A distinção entre função como objecto e função como um procedimento é esclarecida pelas conclusões do estudo levado a cabo por Sfard (1987). Ela tentou perceber se dezasseis alunos israelitas da disciplina de Análise (com idades compreendidas entre os 16 e os 18 anos), que estavam familiarizados com a definição formal de função, compreendiam as funções operacionalmente ou estruturalmente. Sfard concluiu que a maior parte dos alunos envolvidos no estudo compreendiam funções mais como um processo do que como uma idealização estática. Os resultados dos estudos de Sfard levantam algumas questões importantes, tendo em vista o ensino da Matemática. Os símbolos e definições ensinados nas escolas superiores são muitas vezes estruturais, não operacionais — no sentido de Sfard. Esta abordagem de ensinar Análise parece não ser muito efectiva. De acordo com Sfard, se uma concepção operacional é, na verdade, o primeiro passo na aquisição de uma nova ideia matemática, deve-se encorajar a aprendizagem de processos antes de os traduzir em definições estruturais.

A concepção estrutural será necessária? O que é que se ganha quando se trata uma função não apenas como um processo mas também como um objecto, como entidade?

Uma razão para a complexidade do conhecimento matemático é que muitas noções matemáticas podem desempenhar o papel de processos ou de objectos, dependendo da situação do problema e da conceptualização do aluno (Dreyfus, 1990). Tipicamente, aprender um conceito inclui muitos estádios, começando com a realização de operações de um processo em termos concretos. Quando um aluno se familiariza com um dado processo, este toma a forma de uma série de operações que podem ser realizadas no pensamento; o aluno alcançou pensamento operacional no que diz respeito a esse conceito. Num estádio posterior, a imagem mental desse processo cristaliza-se numa entidade simples, um novo objecto. Uma vez alcançado este estádio, o aluno é capaz de pensar nesta noção, quer dinamicamente como um processo, quer estaticamente como um objecto.

Depois de ser dada aos alunos a noção de função, espera-se que analisem e manipulem a nova entidade com uma confiança que só pode ser realizada por aqueles que podem tratá-la como se fosse uma coisa real (Sfard, 1992). A muitos dos nossos estudantes falta-lhes essa capacidade. Ter consciência do longo e difícil processo anterior ao nascimento de um objecto matemático pode ser a chave para compreender algumas das dificuldades sentidas por tantos dos nossos alunos.

A formação de concepções estruturais parece essencial para a aquisição de conceitos mais avançados. Não é óbvio o que pode ser feito para ajudar os alunos na transição da concepção operacional para a estrutural. Os dados de Dubinsky *et al.* (citados em Sfard, 1992) parecem indicar que o uso apropriado de computadores pode ter algum impacto positivo na capacidade dos alunos pensarem nas funções como objectos. Estes autores desenvolveram uma experiência de ensino sobre o conceito de função. O estudo envolveu setenta e três alunos. Concluíram que os alunos manifestaram algumas dificuldades em considerar uma função como um objecto. De acordo com os investigadores, foi uma luta árdua tentar imprimir nos alunos uma abordagem estrutural do conceito de função. No entanto, as dificuldades encontradas parecem não ter interferido na capacidade dos alunos resolverem a maior parte dos problemas e enfrentarem, com êxito, os aspectos mais técnicos dos conteúdos estudados. Durante a experiência de ensino, os alunos conseguiram, por exemplo, fazer a tradução entre as múltiplas representações de uma função. Os investigadores concluíram, então, que há boas razões para acreditar que mesmo que a reificação do conceito de função não tenha tido lugar nestes alunos, os esforços concentrados dos investigadores ajudaram, pelo menos, a sua interiorização e condensação. No final do curso, foi administrado, a esses alunos, um questionário sobre funções. Embora muitas das suas respostas indicassem mais uma concepção operacional do que uma concepção estrutural, os resultados mostraram um progresso substancial em direcção à concepção estrutural, pelo menos em comparação com os alunos do grupo de controlo. Apenas alguns deles continuaram a considerar o termo função como sinónimo de fórmula ou de equação. Os autores sublinharam ainda que o hiato entre os esforços investidos e o progresso no pensamento estrutural foi tão grande que os levou a admitir que o processo de reificação é difícil. A concepção estrutural pode ficar praticamente fora do alcance de alguns alunos, qualquer que seja o método de ensino utilizado.

Há, no entanto, dois factores que podem influenciar o progresso dos alunos de uma concepção operacional para uma concepção estrutural do conhecimento: tempo e motivação. O tempo é, provavelmente, o factor mais menosprezado por todos. Para que um objecto abstracto nasça, pode ser necessário, por vezes, um longo período de incubação. Os alunos e professores não podem esperar recompensas imediatas para os seus esforços directos de reificação; esta pode ocorrer quando menos se espera, muitas vezes depois de alguns dias, outras vezes, depois de meses ou mesmo anos.

2. Representação gráfica e visualização

As Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (NCTM, 1991, p. 186) referem que "os alunos devem compreender o carácter universal da noção de função através de actividades como a descrição de relações que existem no mundo real e que podem ser representadas graficamente, a leitura e a interpretação de gráficos, e o esboço de gráficos de dados nos quais o valor de uma variável depende do valor da outra".

É importante para o estudo da Análise, o modo como são ensinadas as representações e interpretações de gráficos e o grau com que os alunos acreditam no pensamento visual em contraste com o pensamento analítico.

Segundo Vinner (1989), entre os alunos que têm sucesso em Matemática, o modo algébrico é muito utilizado para resolver problemas rotineiros. O sucesso na Matemática é medido essencialmente através da resolução desse tipo de problemas que não requerem capacidades visuais. Esta interpretação é consistente com as ideias de Dreyfus e Eisenberg (1986) que afirmam explicitamente que os professores colocam poucas questões aos alunos para aplicarem capacidades visuais. Vinner (1989) chama a atenção dos professores no sentido de ensinarem e testarem o pensamento visual, desde que eles próprios acreditem tratar-se de uma parte importante do pensamento matemático.

Num curso de Análise que envolveu 67 alunos do ensino secundário, em Israel, Vinner (1989) deu uma ênfase especial à abordagem visual. Durante o curso, pediu aos alunos que formulassem o teorema do valor médio e que apresentassem uma prova visual e uma prova algébrica do teorema. A maioria dos alunos escolheu uma prova algébrica, o que obrigou à memorização de uma função auxiliar. Vinner ficou surpreendido com estes resultados. No ano seguinte, ao leccionar o mesmo curso, o investigador apresentou as provas visual e algébrica do referido teorema. Perguntou aos setenta e quatro alunos que frequentavam o curso, qual a prova que achavam mais convincente. Cerca de metade manifestou-se a favor da prova algébrica, a outra metade optou pela prova visual. Vinner concluiu que os alunos preferem uma prova algébrica devido à sua percepção de que é mais matemática e mais geral e que, no contexto do exame final, é mais aceitável que a prova visual.

Os alunos, mesmo que explicitamente induzidos à resolução de questões por processos visuais, têm tendência a pensar mais na representação analítica de uma função do que na sua representação gráfica (Clements,1984; Mundy, 1984; Dick, 1988; Monk, 1988; Swan, 1988; citados em Eisenberg, 1992).

De uma maneira geral, os alunos escolhem um quadro de referência teórico em vez de visual para processar informação matemática (Eisenberg e Dreyfus, 1986). Os autores argumentam que esta escolha não é acidental. Para muitos matemáticos, professores de Matemática, e alunos, a Matemática não é visual. Além disso, as representações visuais são difíceis de compreender a não ser que um aluno tenha sido iniciado num processo de interpretação. Finalmente, há a percepção de que o ensino eficiente da Matemática escolar requer uma apresentação sequencial, algorítmica, mais do que um conjunto de representações visuais. Eisenberg e Dreyfus concluíram que os poderosos benefícios que podem advir do pensamento visual na Matemática necessitam do desenvolvimento de materiais de ensino apropriados para a sua inclusão no currículo da Matemática escolar.

2.1. Importância das representações matemáticas

Os documentos da reforma do ensino da Matemática (NCTM, 1991) preocupam-se com as representações como uma forma de ensinar uma Matemática compreensiva.

A noção de que uma representação externa pode dar origem a um conceito na mente de um aluno leva-nos à distinção entre representações internas e externas (Janvier *et al.*, 1993). As representações internas são imagens mentais construídas sobre a realidade, não são directamente observadas e devem ser inferidas através do trabalho e das palavras dos alunos. As representações internas referem-se a modelos cognitivos, conceitos ou objectos mentais. As representações externas, construídas para ilustrar uma dada situação matemática, estimulam os sentidos e incluem sistemas algébricos, diagramas, gráficos, tabelas, modelos, etc. Os motivos do recurso a representações externas na aprendizagem, segundo Janvier (1987) são os seguintes:

— É impossível estudar Matemática sem apreender algumas representações convencionais, pois é, por vezes, difícil dissociá-las do conceito. (O gráfico cartesiano é um exemplo duma representação indissociável do conceito de função). O aluno deve encará-las como ferramentas que é capaz de usar em situações apropriadas.

— São concretizações múltiplas dum conceito ou estrutura. Espera-se que o aluno, analisando o que têm em comum, seja capaz de abstrair o conceito ou a estrutura em causa.

— Podem ser apresentadas ao aluno várias representações na esperança de que alguma ilumine a tarefa.

— São consideradas motivadoras, podendo tornar a matemática mais atraente.

Na Norma 4 (NCTM, 1991, p. 175) sobre Conexões Matemáticas para os anos 9-12, encontramos:

"Nos anos de escolaridade 9-12, o currículo de Matemática deve incluir o estudo das conexões e das interacções entre os vários temas matemáticos e as suas aplicações, de modo que todos os alunos:

- reconheçam representações equivalentes do mesmo conceito;
- relacionem procedimentos representados de uma determinada forma com procedimentos em representações equivalentes;

Esta norma realça a importância das conexões entre os temas matemáticos e entre a Matemática e as outras disciplinas. São indicadas como importantes dois tipos genéricos de conexões: (1) conexões de modelação entre situações problemáticas que surgem no mundo real ou noutras disciplinas e as suas representações matemáticas; e (2) conexões entre duas representações matemáticas equivalentes e entre os correspondentes processos em cada uma.

Os alunos que são capazes de aplicar diferentes representações da mesma situação problemática ou do mesmo conceito matemático e de traduzir umas nas outras, disporão de um conjunto de instrumentos flexível e poderoso. Ao mesmo tempo, o seu apreço pela consistência e beleza da Matemática será mais aprofundado".

De acordo com esta proposta de ensino, devem ser exploradas com os alunos as relações entre as diferentes representações do mesmo conceito, sem esquecer que as conexões entre a Análise e a Geometria são das mais importantes. Os avanços na tecnologia gráfica permitem que os alunos resolvam muitos problemas, utilizando computadores que, tradicionalmente, eram resolvidos usando apenas técnicas algébricas. O estudo dos gráficos proporcionado pelo *software* computacional muda as competências de manipulação algébrica como um pré-requisito para fazer conexões entre as representações algébrica e geométrica.

Na Norma 6 (NCTM, 1991, p. 185) sobre Funções, para os anos 9-12 é referido que:

"O currículo de Matemática deve incluir o estudo prolongado de funções de modo que todos os alunos:

- representem e analisem relações utilizando tabelas, regras verbais, equações e gráficos;
- traduzam representações tabulares, simbólicas e gráficas de funções umas nas outras."

Em resumo, o NCTM sublinha a importância da capacidade dos alunos criarem e reconhecerem diferentes representações de conceitos matemáticos e a capacidade de mudar de uma representação para outra. O aluno deve saber escolher a representação que lhe facilita o desenvolvimento de uma determinada tarefa.

É preciso não esquecer, no entanto, que embora seja importante ter muitas representações de um conceito matemático, a sua posse não é suficiente para permitir o seu uso na resolução de problemas (Dreyfus, 1994).

Parte da compreensão de uma ideia é a capacidade para a reconhecer implantada numa variedade de sistemas representacionais diferentes e para traduzir essa ideia nas múltiplas representações (Lesh, Post, e Behr, 1987a). As múltiplas representações construídas pelos alunos, no que diz respeito aos conceitos de função e de derivada podem enriquecer a sua compreensão.

2.1.1. Tradução entre diferentes representações de uma função

Uma função pode ter múltiplas representações: uma descrição verbal, uma tabela de valores, uma expressão algébrica e um gráfico. A descrição verbal utiliza a linguagem comum para nos dar uma visão descritiva do conceito. A tabela dá-nos uma visão quantitativa, facilmente interpretável do ponto de vista de uma correspondência — identificação de pares de valores — mas, na maior parte dos casos, parcial e insuficiente, uma vez que a partir dela dificilmente podemos extrair as características gerais da função. As representações algébrica e gráfica de uma função podem proporcionar uma visão mais global da função.

O sentido comum suporta a noção de que as múltiplas representações de funções podem ajudar a sua compreensão. Usadas reflectidamente, as múltiplas representações podem reduzir ambiguidades que podem ser originadas face a uma única representação. Cada representação, bem escolhida, transporta parte do significado, juntas podem melhorar a fidelidade da mensagem completa (Goldenberg, 1988).

O conceito de função nos currículos escolares deve ser desenvolvido, apresentando as suas múltiplas representações, com a implícita esperança de que estas ajudarão a compreender o objecto abstracto. São dadas poucas oportunidades aos alunos para pensamento funcional. Além disso, os aspectos técnicos das tarefas, muitas vezes, impedem que os alunos se concentrem nos conceitos. Isto pode originar dois problemas: a compreensão dos conceitos, procedimentos e propriedades de funções é limitada a uma representação particular, isto é, o mesmo conceito, apresentado em representações diferentes é concebido como sendo diferente; está fora do alcance de muitos alunos o processo de transferir conhecimento de uma representação para a outra.

O desenvolvimento de um currículo em que seja feito um esforço sistemático e concertado para não apresentar apenas funções nas suas múltiplas representações mas que estabeleça, muito explicitamente, as ligações entre essas representações pode proporcionar a transferência entre essas representações durante a resolução de problemas e, essa transferência, está correlacionada com uma boa capacidade de resolução de problemas (Schwartz e Dreyfus, 1989, citados em Dreyfus, 1990).

Alguns estudos têm mostrado que, embora possuindo o conhecimento de que uma função pode ter múltiplas representações, os alunos estabelecem fracas conexões entre essas representações (Ferrini-Mundi e Lauten, 1993). Por exemplo, traçar o gráfico de uma função a partir da sua representação analítica é, geralmente, fácil para os alunos. Mas, a partir da representação gráfica de uma função obter uma fórmula que a defina tem-se manifestado uma tarefa difícil. Muitas vezes, as representações analíticas e gráficas são vistas, pelos alunos, como independentes e podem mesmo usar métodos contraditórios de raciocínio em cada um dos cenários. Os alunos devem ser encorajados a trabalhar em ambos os cenários e a transferir ideias facilmente entre eles.

Janvier (1987) fala da existência de uma analogia entre as múltiplas representações de uma função e um iceberg em forma de estrela que mostra uma ponta de cada vez, evidenciando, deste modo, o seu carácter inseparável e global (figura 2.5). Uma tradução entre representações pode consistir na passagem de uma ponta da estrela para a outra.

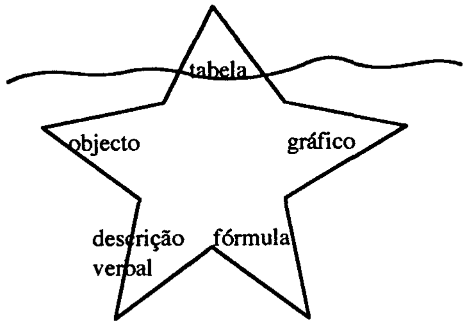


Fig. 2.5 - Componentes da representação (Janvier, 1987, p. 69)

Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990) falam de tradução, para indicar a passagem de uma representação para a outra, e consideram que esta envolve: (a) reconhecer a mesma função nas diferentes representações; (b) identificar para uma transformação de uma função numa representação, a sua transformação correspondente noutra representação; (c) construir uma representação de uma função dada noutra representação.

As dificuldades na transição entre diferentes representações tornam-se mais pronunciadas quando as tarefas requerem que se considerem as funções como objectos, tal como em tarefas de transformações de funções: $f(x) \longrightarrow f(x) + k$ ou $f(x) \longrightarrow f(x + k)$ e $f(x) \longrightarrow k\, f(x)$ ou $f(x) \longrightarrow f(k\, x)$ (Dreyfus, 1990).

O ensino das funções deve ser articulado de forma a englobar as principais representações, nomeadamente, a forma gráfica, tabular e analítica. A utilização pelos alunos de mais do que uma representação pode ajudá-los na transição de uma compreensão concreta e limitada de um tópico, para outra mais abstracta e flexível (Domingos, 1994).

Ponte (1985, p. 247) afirma que os resultados do seu estudo sobre "Concepções e dificuldades dos alunos em raciocínio funcional" apontam para a necessidade de "desenvolver actividades que exijam a coordenação de informação diversificada, nomeadamente de natureza numérica, gráfica e algébrica".

Estas tarefas de traduções entre representações adaptam-se bem às tecnologias computacionais. O uso apropiado de computadores pode ter um impacto positivo ajudando os alunos a estabelecer conexões adequadas entre as múltiplas representações de funções.

2.2. Interpretação de gráficos de funções

Interpretar um gráfico consiste em colocar na forma verbal a informação dada na forma gráfica. É descrever, por palavras, a relação entre duas variáveis (Janvier, 1978).

A maior parte dos gráficos fora da sala de aula de matemática mostram características de alguma situação ou processo de um modo efectivo para a comunicação. São exemplo disso os gráficos de tendência da inflação ou dos preços das casas, da taxa de descida de radioactividade, etc. Ajudar os alunos a ler e a interpretar gráficos deve ser um dos objectivos dos professores aquando do estudo das funções.

Qual a distinção entre "ler" e "interpretar" um gráfico? Uma questão não envolve interpretação se a sua linguagem está totalmente relacionada com os nomes que identificam os eixos do gráfico. Por exemplo, nos gráficos da média de peso de rapazes e raparigas, de diferentes idades, a questão "Qual a média de peso dos rapazes de 8 anos?" envolve apenas leitura. No entanto, em relação ao mesmo gráfico, a questão "Em que idade é que as raparigas aumentam de peso mais rapidamente?" já requer interpretação. A interpretação de gráficos parece ser um processo mais complexo e difícil do que a leitura de gráficos (Ponte, 1984).

A presença ou ausência de significado real para um gráfico pode influenciar o modo como os alunos interpretam a informação apresentada graficamente. Os alunos podem interpretar melhor um gráfico quando este representa um fenómeno físico que lhes é familiar do que quando ele representa um traçado arbitrário. Alguma familiaridade com características da situação pode ser um factor decisivo na interpretação correcta de gráficos (Janvier, 1978). No entanto, Bell e Janvier (citados em Ponte, 1984) notaram a influência de distractores de situação no processo de interpretação de gráficos. Isto é, experiências prévias acerca da situação podem interferir com a interpretação de características abstractas dos gráficos.

Os alunos, de uma maneira geral, conseguem levar a cabo tarefas relacionadas com gráficos, tais como encontrar os seus extremos relativos, marcar pontos dadas as suas coordenadas, mas apresentam grandes dificuldades quando pretendem interpretar a informação qualitativa implícita nos gráficos ou quando querem usar informação relevante para discutir as características das relações funcionais. Em suma, têm alguma dificuldade em interpretar gráficos, isto é, eles não compreendem a relação entre as variáveis independente e dependente que o gráfico descreve (Ponte, 1984).

A interpretação de gráficos pode ser global e geral ou pode ser local e específica. Bell e Janvier (1981) argumentaram que há ênfases desproporcionadas no currículo no que diz respeito a tarefas envolvendo interpretações locais. Dar demasiada ênfase a esse tipo de interpretações pode resultar numa concepção de um gráfico como sendo uma colecção de pontos isolados e não um objecto ou uma entidade conceptual (Schoenfeld *et al.*, citados em Leinhart *et al.*, 1990).

O facto de os alunos privilegiarem uma interpretação de gráficos sob a forma de pontos deve-se ao tipo de ensino a que são sujeitos, sendo-lhes, normalmente, pedido que representem gráficos a partir de tabelas e depois questionados de modo a utilizarem a leitura das mesmas para responderem (Janvier, 1978). Em vez deste tipo de tarefas, o autor considera que os alunos deviam primeiro ser confrontados com gráficos qualitativos de situações concretas, sendo questionados com vista a interpretar os gráficos de uma forma global e não de uma forma pontual.

Numa linha convergente, Ferrini-Mundi e Lauten (1993) afirmam que os alunos interpretam melhor as funções ponto-por-ponto ou localmente, do que globalmente. O nosso currículo pode dar ênfase às interpretações locais de funções, quer no sentido geométrico de examinar o comportamento de um gráfico num simples ponto, quer no sentido algébrico de calcular o valor da função num ponto. Tarefas que encoragem os alunos a interpretar gráficos qualitativamente, podem ajudar os alunos a construir uma interpretação global. A construção de histórias a partir de gráficos pode ser feita na sala de aula e pode aumentar as competências dos alunos na interpretação global de gráficos (Wagner e Parker, 1993). Usando tecnologias computacionais e integrando na sala de aula situações de funções do mundo real, os professores e investigadores podem ajudar os alunos a desenvolver a compreensão de funções mais intuitivas. O gráfico pode tornar-se uma ferramenta para a descoberta de ideias matemáticas ou uma estratégia para resolver problemas, mais do que um final árduo em si. Por exemplo, pedir aos alunos que, a partir do gráfico da função f, traçem os gráficos das funções módulo de f, e da função inversa de f, sem necessidade de ter as respectivas representações algébricas, pode desenvolver conexões algébricas e geométricas muito fortes.

São comuns nos alunos dois tipos de concepções erróneas no que diz respeito à compreensão e interpretação de gráficos: interpretação pictórica, ou seja, os alunos interpretam um gráfico como se fosse um esboço da figura (isto acontece principalmente quando as palavras têm fortes conotações gráficas tais como subir e descer); confusões que dizem respeito ao declive e à altura (Clements, 1985; Janvier, 1978). Estas concepções dos alunos já foram assinaladas em § 1.1.2.

Janvier (1978) sumariou as dificuldadesdos manifestadas pelos alunos na interpretação de gráficos do seguinte modo:

(i) Confusão de que um gráfico é um desenho, um esboço da situação. Vencer esta dificuldade depende, em parte, da capacidade de experienciar relações entre duas variáveis representadas num gráfico cartesiano;

(ii) Os alunos estão, normalmente, familiarizados com gráficos de barras e outras espécies de gráficos de frequências.

(iii) Escolha dos tipos de variação — linear, curva, etc. Mesmo quando um aluno reconhece que uma função é crescente é, muitas vezes, difícil para ele ver o tipo de variação e relacioná-la com o tipo de gráfico. O gráfico devia ser representado por uma linha recta ou por uma curva? A curva devia ser côncava ou convexa?

(iv) Dificuldades em interpretar declives e intervalos.

(v) Algumas das dificuldades que os alunos têm não estão apenas ligadas a dificuldades de fazer a tradução entre gráficos e situações de descrições verbais, mas estão geralmente mais dependentes da capacidade dos alunos para dar respostas relacionais. Alguns alunos concentram-se num factor de valor relevante e excluem a coordenação com outros factores — problema de fixação. Por vezes, os alunos fixam-se apenas numa variável quando devia ser considerada a relação entre as duas.

Alguns alunos parecem ter uma intuição e compreensão desadequadas quando confrontados com um problema não habitual envolvendo a interpretação de dados representados graficamente (Piston, 1992). De acordo com este autor, os alunos precisam de melhorar as suas competências na interpretação de dados gráficos para lhes ser possível dar uma melhor resposta à informação que os assalta diariamente, quer dentro quer fora da sala de aula.

Com o objectivo de verificar o tipo de problemas envolvendo gráficos encontrados nos livros de texto, Piston analisou nove livros americanos do ensino secundário de Álgebra I e II. A tabela que se segue mostra o tipo de problemas de gráficos encontradas nesses livros (Quadro 2.1).

Quadro 2.1 — Tipo de problemas dos livros de texto envolvendo gráficos

Tipo de Problema	**Percentagem**
Dada a função, traçar o gráfico	88%
Dado o gráfico, analisar, predizer	7%
Dada a função, traçar o gráfico e analisar	4%
Dados os gráficos de duas funções, comparar	0%
Outros	1%

A grande importância dada nestes livos aos problemas de tradução da representação analítica da função para a representação gráfica, contrasta com os tipos de problemas utilizados em outras áreas académicas e na indústria.

A área de predição é também quase ignorada nestes livros de texto. Deve ser desenvolvida nos alunos a capacidade de predizer, ou seja, deve-se pedir aos alunos que, a partir de uma curva, façam a sua extensão de um modo razoável para predizer um valor que não está na parte visível do domínio do gráfico.

2.3. Construção de gráficos de funções

A construção é o acto de criar alguma coisa nova — construir um gráfico, marcar pontos num gráfico, construir uma função algébrica a partir de um gráfico.

O processo de construção de gráficos, a partir de um conjunto de dados, obriga a que haja um processo de selecção, que se dê nome aos eixos, que se seleccione a escala, que se identifique a unidade e, finalmente, que se marquem os pontos.

As tarefas de construção podem ser muito simples (marcar pontos a partir de uma tabela de pares ordenados, com os eixos e escalas marcados) e podem ser bastante difíceis (determinar a expressão analítica de uma função representada graficamente).

A construção de gráficos, tal como a sua interpretação, pode ser local (marcar um determinado número de pontos), ou global (completar um gráfico a partir de alguns dos seus pontos). Também pode ser quantitativa (determinar os coeficientes **m** e **b** na equação $y= mx+b$, dados dois pontos que satisfazem esta equação), ou qualitativa (esboçar um gráfico que representa uma situação).

Em termos das relações entre interpretação e construção de gráficos pode dizer-se que a interpretação nem sempre requer construção; no entanto, a construção é feita, muitas vezes, a partir de alguma interpretação.

Algumas das dificuldades com o traçado de gráficos, identificadas nos alunos do estudo de Ponte (1984), prenderam-se com: a) indecisão sobre o tipo de gráfico a representar; b) construção de escalas não uniformes para representar variáveis uniformes; e c) hesitação ou falha na escolha de unidades.

Uma das tarefas envolvidas na construção de gráficos é a tarefa da escala. Quando as escalas mudam, o gráfico pode parecer bastante diferente.

A construção dos eixos para, em seguida, fazer uma representação gráfica raramente é parte da tarefa de construir gráficos. Os eixos, a escala e a identificação dos eixos são, normalmente, dados à partida. No entanto, a construção dos eixos e a determinação da escala requerem um conjunto de conhecimentos e competências bastante sofisticadas. Construir uma escala está longe de ser trivial. Com o aparecimento das tecnologias, estas tarefas podem deixar de ser realizadas pelos alunos. As actividades movem-se em direcção à interpretação de gráficos. No entanto, a atenção às escalas torna-se fundamental quando se usam tecnologias gráficas — o aluno pode olhar para um determinado gráfico através de diferentes "janelas".

As ferramentas computacionais na aula de Matemática, concretamente no estudo das funções, alteram a ênfase da actividade de construção de gráficos para a de interpretação desses mesmos gráficos. Cálculos repetitivos e complexos realizam-se no computador. Os alunos ficam livres para se concentrarem nos conceitos e para se interrogarem sobre "o que o gráfico está a dizer". Os alunos são, assim, encorajados a fazer conjecturas.

"O computador faz com que o foco da actividade com gráficos seja transferida da construção para a interpretação de gráficos. Quando os gráficos gerados por computador se tornam o foco da discussão acerca da Matemática, na aula há uma mudança notável nos papéis e interacções de professores e alunos. A sala de aula torna-se um lugar de colaboração entre o professor e o aluno na tentativa de compreender a Matemática que é exibida perante eles. O papel do professor muda de 'como' construir um gráfico para explicações e perguntas sobre 'o que o gráfico está a dizer' acerca de uma expressão algébrica ou duma situação que ele representa. As tarefas dos alunos mudam de marcar pontos e traçar curvas para escrever explicações de pontos chave de gráficos ou de características globais" (Ponte, 1991, p. 56).

2.4. Visualização

Muitas das mais significativas, originais, e profundas criações da mente humana têm sido produzidas por um modo de pensamento que é principalmente não verbal, envolvendo representações internas melhor descritas como imagens de carácter principalmente espacial e visual (Clements, citado em Aspinwall, 1994, p. 20). Numa carta ao matemático Jaques Hadamard, Albert Einstein escreveu que pensava sempre em termos de figuras mentais e que raramente usava palavras. Explicava que a sua "capacidade particular" não estava no cálculo matemático, mas na "visualização ... efeitos, consequências, e possibilidades". Einstein não conseguia mesmo encontrar as palavras para comunicar os conhecimentos recentemente formulados sem as suas próprias conceptualizações através de significados de "imagens mais ou menos claras que podem ser voluntariamente reproduzidas e combinadas".

A acção combinada entre imagens mentais e pensamento simbólico é vital na resolução de problemas (Lin, citado em Aspinwall, 1994). O autor sugere que os professores de Matemática devem usar diagramas e gráficos para promoverem nos alunos imagens mentais ricas e assim, melhorarem o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A visualização é uma parte importante da compreensão e pode ter um forte impacto na imaginação dos alunos.

É possível usar o poder complementar da visualização para dar uma percepção global de alguns conceitos matemáticos (Tall, 1994). Para ter sucesso em Matemática, é desejável ter representações mentais ricas dos conceitos. Os alunos que trabalham com poucas imagens mentais não estão realmente a aprender Matemática. O seu cálculo consiste numa vasta série de algoritmos e num complicado sistema de regras que lhes diz que procedimento usar e quando. O esforço colocado neste tipo de ensino é desperdiçado: os algoritmos memorizados são esquecidos depressa.

A visualização pode ajudar a criar representações mentais ricas dos conceitos. Por exemplo, os conceitos que dizem respeito às funções podem ser introduzidos através de visualizações (Kleiner, citado em Eisenberg, 1992). São típicas nos alunos imagens mentais pobres do conceito de função, mesmo que consigam recitar uma definição teórica geral do conceito, quando pensam apenas em termos de fórmulas, (Dreyfus, 1994).

De uma maneira geral, os alunos não fazem a ligação do pensamento visual com o pensamento analítico. Este comportamento reflecte o ensino que lhes é ministrado, onde há uma subvalorização do raciocínio que faz uso essencialmente da informação visual (raciocínio visual). Este é considerado um raciocínio de segunda categoria servindo, quando serve, apenas como auxiliar da aprendizagem.

Terá o raciocínio visual pouco peso no raciocínio matemático? Deverá este raciocínio continuar a ser considerado pouco digno e de valor inferior ao raciocínio algébrico?

Embora se pense que a visualização é essencial para a compreensão matemática, alguns estudos, por exemplo, Vinner (1989), têm mostrado, de uma forma consistente, que a compreensão dos alunos é tipicamente analítica e não visual. Os alunos têm uma inclinação para a resolução analítica das questões. Alguma coisa lhes parece errada na abordagem visual. Esta inclinação para o algébrico manifestada pelos alunos, segundo o autor, pode ser devida à crença de que a prova visual não é realmente uma prova matemática, ao facto de que o modo analítico é normalmente mais usado que o modo gráfico ou visual para resolver problemas de rotina nos testes, e a crença mantida por alguns alunos e alguns professores de que fazer cálculo é manipular com destreza símbolos e números. Os próprios matemáticos são, por vezes, cautelosos em relação a considerações visuais. Vinner acrescenta ainda que esta crença de que a prova visual é algo de ilegal ou inferior pode ser consequência dos Cursos de Geometria onde "ver" não é considerado "provar". Isto é verdade na Geometria, mas a situação é diferente na Álgebra e na Análise. Nestes dois ramos da Matemática, as interpretações gráficas desempenham um papel crucial. A experiência visual é extremamente importante como uma base sólida para a abordagem algébrica. Vinner acrescenta ainda que as noções algébricas deviam ser ensinadas através de uma interpretação visual.

Há razões que podem explicar porque é que os professores não utilizam argumentos visuais. De uma maneira geral, o argumento analítico é pequeno, simples e elegante, dá o resultado sem grandes complicações. É fácil de aprender para o aluno, fácil de aplicar a exercícios. É também fácil de ensinar. Não requer a preparação de um gráfico, transparência ou programa de computador. Corresponde àquilo que os alunos esperam de uma prova matemática e, em princípio, não conduz a grandes discussões (Eisenberg, 1992). O argumento visual, por outro lado é, muitas vezes, construído sobre pré-requisitos de conhecimento visual.

Eisenberg definiu, com mais detalhe, três razões para uma preferência pelo método analítico: uma cognitiva (o método visual é mais difícil), uma sociológica (é mais difícil ensinar o método visual) e uma relacionada com as crenças sobre a natureza da Matemática (a Matemática não é visual). Eisenberg refere ainda que, se os métodos visuais são subvalorizados por matemáticos e professores de Matemática, se eles são, na melhor das hipóteses, mnemónicas matemáticas, esta atitude é transmitida aos alunos e, assim, os professores não se devem admirar que estes reajam desse modo. No entanto, muitos matemáticos utilizam explorações e argumentações visuais no seu trabalho do dia-a-dia. Porque é que eles não passam esse tipo de pensamento aos alunos? Ou, se o fazem, porque é que estes não o adoptam? Eisenberg considera que existe uma diferença entre os métodos de processar a informação que os matemáticos usam nos seus próprios trabalhos, e que são muitas vezes visuais, e aqueles que eles ensinam, nos quais os elementos visuais desempenham apenas um papel ilustrativo. É relativamente fácil apresentar um argumento ordenado de uma maneira linear, sequencial. É muito mais difícil apresentar grande quantidade de informação a duas dimensões onde existem múltiplas ligações entre as várias peças de informação. Um diagrama é uma colecção de informação muito complexa e também muito concentrada. Se a informação completa contida num diagrama pudesse ser reformulada na forma proposicional, ocuparia uma grande quantidade de espaço. Se duas representações de um conceito matemático são equivalentes no sentido em que contêm o mesmo conjunto de informação, muitas vezes, alguma desta informação estará explícita no diagrama, mas implícita na representação analítica. Consideremos, por exemplo, a função cuja representação analítica é $f(x) = | x - 2 | - 2$. A partir do gráfico, podemos ver explicitamente que ela não é diferenciável em $x = 2$, que tem zeros em 0 e 4, que é decrescente até 1, etc.. Toda esta informação está contida na fórmula da função, mas de modo implícito. Compreende-se que a informação esquemática é muitas vezes mais útil e este aumento de utilidade não deriva do facto de haver mais informação no diagrama, mas antes por esta informação estar presente de tal modo que exibe explicitamente importantes partes de informação e ligações conceptuais importantes entre essas peças de informação.

No entanto, as representações esquemáticas não são imediatamente inteligíveis para iniciados. Os diagramas são úteis para aqueles que conhecem os processos de cálculo apropriados para tirar vantagem deles. Além disso, uma pessoa que resolve problemas precisa do conhecimento de como construir um bom diagrama. Não é então de admirar que os alunos que não tenham sido ensinados de uma maneira apropriada recusem desenhar diagramas ou gráficos, e não saibam como tirar proveito daqueles que lhes fornecem, ou mesmo daqueles que eles próprios traçam. Isto quer simplesmente dizer que eles não tiveram a oportunidade de adquirir a competência de interpretar tais diagramas, de os usar na resolução de problemas e até mesmo de construírem diagramas úteis.

A visualização espacial desempenha um papel importante no pensamento matemático em geral, e na aquisição de conceitos e na resolução de problemas, em particular (Eisenberg e Dreyfus, 1986). Na Análise, por exemplo, a visualização espacial é, normalmente, usada para explicar os conceitos de derivada e de integral. No entanto, pede-se pouco aos alunos para fazerem interpretações geométricas desses conceitos. Quantos alunos, ao tentarem determinar a recta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ no ponto (1, 1), acompanharão a sua resolução com um desenho? As capacidades de visualização espacial são normalmente consideradas importantes para um primeiro encontro com o conceito. Em seguida, praticam-se algoritmos e as representações visuais subjacentes são, a maior parte das vezes, abandonadas.

No que diz respeito ao tipo de pensamento espacial-visual/verbal-lógico, os indivíduos podem ser divididos em 3 grupos (Krutetskii, citado em Aspinwall, 1994):

1. <u>Tipo geométrico</u>. Um indivíduo representativo deste tipo de pensamento tem uma componente visual-pictórica bem desenvolvida. Este grupo inclui indivíduos que habitualmente empregam o modo espacial-visual quando tentam resolver problemas de matemática; esforçam-se por visualizar relações matemáticas e sentem necessidade de uma interpretação visual ou mesmo de estruturas matemáticas abstractas.

2. <u>Tipo analítico</u>. Este grupo contém aqueles que preferem códigos verbais a imagens visuais. Um indivíduo representativo deste tipo de pensamento é caracterizado por ter uma preferência por uma componente verbal-lógica e ter uma componente visual-pictórica fraca.

3. Tipo harmónico. Pertencem a esta categoria os indivíduos que podem empregar ambos os modos de pensamento quando resolvem um problema. Possuem um equilíbrio bem desenvolvido entre as componentes verbal-lógico e visual-pictórica.

Num curso de admissão à Universidade dinamizado por Eisenberg (1994), todos os problemas que envolviam inequações (mais de trinta) foram resolvidos quer analiticamente quer graficamente. Foram sublinhadas, em cada problema, as vantagens do método gráfico em relação ao método analítico. No exame, apenas cerca de 5% dos alunos optaram por uma resolução gráfica. Foram ainda colocadas outras questões que podiam ser resolvidas quer graficamente quer analiticamente. Essas questões foram respondidas por três grupos: seis investigadores Matemáticos, seis professores de Matemática e seis alunos do 3° ano da Universidade. Foram informados que tinham dois minutos para resolver cada questão. Não se pretendia verificar se os problemas eram ou não bem resolvidos, apenas observar o método utilizado na sua resolução. Concluiu-se o seguinte:

— A utilização de processos visuais foi independente do tipo de problema — cada problema provocou, pelo menos, 20% de respostas por processos visuais e, pelo menos 30% de respostas por processos analíticos.

— Há indivíduos que pensam de uma forma visual e outros que pensam analiticamente. Embora os investigadores tenham utilizado mais processos visuais do que os alunos, estiveram longe de usarem apenas métodos visuais. Um deles foi totalmente analítico.

— Os investigadores e professores foram mais flexíveis do que os alunos ao escolher uma abordagem para os problemas.

— Os alunos tiveram tendência a classificarem-se como pensadores visuais mesmo depois de terem seguido uma abordagem analítica.

Skemp (citado em Tall, 1989) analisou as diferenças entre os pensamentos algébrico e visual e concluiu que o primeiro é analítico, detalhado, lógico e sequencial, enquanto que o segundo é integrativo, holístico e capaz de representações simultâneas de ideias.

3. Compreensão dos conceitos de Análise pelos alunos

A apresentação, no ensino secundário português, do conceito de derivada de uma função num ponto como a recta tangente à curva representativa da função nesse ponto e determinação do seu declive apela a noções geométricas intuitivas. Graficamente, pode começar por ser vista uma recta secante aproximando-se da recta tangente. A representação visual é ligada à representação simbólica do limite do quociente (quando h tende para zero) (f(x+h)-f(x))/h. O conceito de derivada é, assim, construído sobre as intuições e imagens que os alunos têm dos conceitos de: declive de uma recta, taxa de variação, limite, secantes e tangentes. Discutiremos esses conceitos no sentido de compreender como é que os alunos constroem o conceito de derivada de uma função e suas aplicações através de uma abordagem gráfica em contexto computacional.

Nos novos progamas de Matemática (DES, 1997, p. 7) pode ler-se "O estudo do Cálculo Diferencial é precedido de um tema em que se estudam as propriedades elementares das funções e respectivos gráficos, dando oportunidade a que os alunos se familiarizem com este tópico fundamental da matemática actual. No estudo do Cálculo Diferencial dá.-se prioridade ao trabalho com a noção de derivada, sendo deixada a formalização da definição de limite para uma fase posterior. Ao contrário dos programas anteriores, a noção de limite é visada primeiro de forma apenas intuitiva; em seguida é formalizada no tema das sucessões, sendo mais tarde generalizada para funções quaisquer".

3.1. Declive de uma recta

O declive de uma recta é um dos conceitos fundamentais que os alunos devem construir para fazerem uma interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto.

Giménez (1990) levou a cabo uma investigação com o objectivo de analisar o processo de aprendizagem de alunos espanhóis, de 15 e 16 anos, de três turmas do ensino secundário que seguiram as propostas curriculares e metodológicas do Grupo Zero *Introducció a les derivades.* A sua investigação diz respeito às três noções básicas ligadas ao conceito de derivada: o declive de uma recta, a velocidade instantânea de um movimento não uniforme e a taxa de variação instantânea de uma função.

Giménez deu relevância aos esquemas conceptuais dos alunos em relação à noção de declive de uma recta e às dificuldades detectadas nos procedimentos da sua obtenção, quer a partir da expressão analítica da função, quer a partir de uma tabela ou a partir de um gráfico. Os esquemas conceptuais dos alunos da noção de declive foram classificados de: perfil geométrico, perfil operativo e perfil funcional.

O perfil "geométrico" caracteriza os alunos cujo esquema conceptual utiliza elementos próprios da linguagem geométrica e sugere um esquema com imagens gráficas do declive de uma recta. Estes alunos associam à palavra declive a imagem gráfica de uma recta num sistema de eixos cartesianos com uma certa posição caracterizada, na maior parte dos casos, por um ângulo ou por uma distância. Este perfil, de acordo com Giménez, é o que corresponde ao aspecto menos abstracto, mais simples e intuitivo e mais reforçado pelo significado do termo na linguagem do dia-a-dia. A investigadora acrescenta ainda que muitos alunos falam de inclinação como sinónima de declive, sem precisar inclinação em relação a quê. Entre os alunos mais explícitos, que precisam o que entendem por inclinação, foram encontradas expressões do tipo: inclinação da recta em relação ao eixo horizontal; inclinação da recta em relação ao eixo das abcissas; inclinação da recta em relação ao eixo das ordenadas; inclinação da recta em relação ao eixo das coordenadas, revelando a confusão e diversidade de significados que os alunos dão à palavra inclinação.

O perfil "operativo" caracteriza os alunos que, quando se lhes pede para explicarem o significado de declive, respondem dando um algoritmo operativo que, ou serve para reconhecer e/ou calcular o declive na equação da recta, ou descrevem a função. Estes alunos associam à palavra declive, a imagem do coeficiente **a** numa fórmula do tipo $y = ax + b$. O esquema conceptual destes alunos tem uma faceta numérica, algébrica, quer dizer, algorítmica, que carece de imagem gráfica. Este perfil, de acordo com Giménez, é o que corresponde ao aspecto mais escolar, no sentido do que fazer na sala de aula em que se calcula o declive a partir de uma equação ou se determina a equação a partir de uns parâmetros dados, um dos quais é o declive.

O perfil "funcional" caracteriza os alunos que definem declive como um quociente entre as variáveis. Estes alunos associam à palavra declive a imagem gráfica de uma recta em que se destacam os incrementos das variáveis. Este perfil aplica-se aos alunos cujo esquema conceptual da noção de declive demonstra uma maior abstracção e complexidade no sentido em que supõe uma imagem mental dos incrementos das variáveis e a sua relação constante. De acordo com

Giménez, este perfil, que está relacionado com o significado de declive como variação da função por unidade, corresponde ao aspecto menos intuitivo, mais abstracto e mais complexo.

Alguns dos alunos do estudo de Giménez apresentaram perfis mistos na determinação do declive de uma recta.

Em relação às dificuldades detectadas nos procedimentos de obtenção do declive de uma recta, Giménez destaca que: (a) houve melhores resultados na obtenção do declive a partir da fórmula do que a partir de uma tabela ou de um gráfico; (b) alguns alunos ignoraram ou omitiram o sinal negativo o que revela uma tendência para evitar números negativos; (c) alguns alunos confundiram os coeficientes numéricos **a** e **b** da expressão y = ax + b; (d) confundiram o coeficiente com o termo do polinómio; (e) confundiram o declive com o inverso do declive.

Giménez refere que, antes de se utilizar o conceito de declive na introdução do conceito de derivada, é imprescindível estudar de novo a recta e as suas características, de modo que, numa segunda abordagem, se assinalem melhor os aspectos do conceito de declive e se encaixem os procedimentos de cálculo num esquema conceptual coerente.

Orton (1983) usou entrevistas clínicas com 110 alunos ingleses, 60 alunos (com idades entre os 16 e 22 anos) de quatro escolas secundárias e 50 alunos (18 a 22 anos de idade) de escolas de ensino superior, para investigar a sua compreensão de declive e de taxa de variação. Concluiu que muitos alunos tinham dificuldades conceptuais com a simples noção de declive (variação nos yy a dividir pela variação nos xx) de uma linha recta. Foram encontradas dificuldades conceptuais semelhantes, quando o conceito de declive foi ampliado à taxa de variação média ao longo de um intervalo de um gráfico não linear. Poucos dos alunos entrevistados de Orton conseguiram fazer a distinção entre taxa de variação média num intervalo e taxa de variação num ponto.

3.2. Taxa de variação

As funções são objectos por excelência para estudar problemas de variação. Uma dada grandeza pode variar no tempo, variar no espaço, variar de acordo com outras grandezas, e pode mesmo variar simultaneamente em diversas dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, pode desaparecer de todo, pode, em suma, obedecer às mais diversas leis ou constrangimentos possíveis (Ponte, 1990).

Muitos alunos parecem usar implicitamente uma noção de taxa de variação. Parecem ter uma ideia intuitiva de taxa de variação que eles usam em situações muito simples. Em questões mais complexas, os alunos, muitas vezes, perdem o contacto com as variáveis com que estão a trabalhar e com o significado de taxa de variação.

As funções mais simples de tratar são as que têm uma taxa de variação constante, as funções lineares. Mais complexas são as funções nas quais a taxa de variação varia sempre de um modo uniforme, como nas funções quadráticas. Mais complexas ainda são as funções que misturam modelos de aceleração e retardação. De um nível mais complexo são as funções nas quais, pelo menos em pontos específicos, não faz sentido falar de taxa de variação, como nas funções com pontos de descontinuidade. Os alunos parecem usar, nestes casos, implicitamente, a mesma noção de taxa de variação que usam intuitivamente em situações muito simples (Ponte, 1984).

As ideias de crescimento e de taxa de variação, muitas vezes não estão muito bem desenvolvidas na mente da maior parte dos alunos e as dificuldades que mostram com esses conceitos não são simplesmente gráficas, mas também semânticas. Os alunos confundem, muitas vezes, como já foi referido, estas ideias com a noção de "ser alto" (Janvier, 1978).

Giménez (1990), na sua investigação com alunos espanhóis de três turmas do ensino secundário, identificou três esquemas conceptuais referentes às noções de velocidade instantânea e de taxa de variação instantânea que classificou de: perfil primitivo, perfil aproximação e perfil limite.

O perfil "primitivo" corresponde aos alunos que não construíram um esquema conceptual específico das noções de velocidade instantânea e de taxa de variação instantânea de uma função. Estes alunos não distinguem velocidade constante de velocidade média e de velocidade num ponto.

O perfil "aproximação" corresponde aos alunos que, no caso do conceito de velocidade instantânea, generalizaram o seu esquema conceptual da noção de velocidade média. No caso da taxa de variação instantânea de uma função, parece ter sido realizada uma transposição, a partir do seu esquema conceptual de velocidade média, que deram lugar a um esquema conceptual de taxa de variação média, de maneira que ambos os esquemas conceptuais servem para resolver situações pontuais por aproximação.

O perfil "limite" corresponde aos alunos que construíram esquemas conceptuais tanto da noção de velocidade instantânea como da noção de taxa de variação instantânea de uma função num ponto, quer dizer que estão em condições de interpretar, descrever e representar situações de variação instantânea de uma função apresentada graficamente. Estes alunos conseguiram passar de uns esquemas conceptuais que implicavam uma visão finita dos fenómenos de variação de uma função, para esquemas conceptuais que implicavam as noções infinitesimais de recta tangente a um gráfico num ponto e declive de uma recta tangente a um gráfico num ponto, como limite das rectas secantes que passam por esse ponto.

O trabalho com gráficos é importante no desenvolvimento do conceito de taxa de variação (Orton, 1983). Assim, como afirma Orton, o desenvolvimento de taxa de variação deve andar de mãos dadas com a compreensão de razão e de representação gráfica. Segundo o autor, podemos ajudar os alunos a compreender a noção de taxa de variação de funções, investigando a representação gráfica de situações da vida real (que conduzam a gráficos lineares e gráficos não lineares) antes de usar abordagens mais algébricas. Deve ser investigada a relação entre recta tangente a uma curva num ponto e noção de taxa de variação, o que poderá levar ao estudo de taxa de variação média, declive de uma recta e secantes a uma curva. É também necessário introduzir a ideia de pontos sobre uma curva onde a função é crescente, onde é decrescente e onde cresce ou decresce mais rapidamente. Ao mesmo tempo, é importante ligar essas considerações à natureza dos valores numéricos do declive da curva — se é positivo ou negativo, se tem um valor grande ou pequeno. Pode ser obtida pelos alunos, nesta fase, uma compreensão elementar do que é o significado de pontos fixos, pontos móveis, extremos relativos e pontos de inflexão e a natureza do declive ou taxa de variação nesses pontos. Orton afirma que um olhar analítico para essas questões, usando cálculos elementares poderia ser muito mais significativo se tivessem sido estudados previamente a partir de um ponto de vista puramente gráfico. O autor sugere aos professores que não devem desperdiçar nenhuma oportunidade para desenvolver estas ideias e afirma ainda que é errado tentar introduzir noções de Análise, sem um estudo longo e persistente de gráficos e de taxa de variação.

Alguns alunos não consideram elementar a regra de cálculo da taxa de variação (incremento de y a dividir pelo incremento de x). No estudo levado a cabo por Orton (1983), com alunos ingleses, 25% omitiram o sinal menos quando calcularam uma taxa de variação negativa, outros calcularam a taxa de variação entre dois pontos A e B, calculando o quociente entre a abcissa de B (ou A) e a ordenada de B (ou A). Orton, como resultado deste estudo, considera que o conceito de taxa de variação assim como o conceito de recta tangente a um gráfico num ponto são noções prévias fundamentais e básicas para introduzir o conceito de derivada. Refere ainda que o conceito de taxa de variação se devia estudar como um tema em si e não apenas como um tema que introduz o conceito de derivada.

O novo programa de Matemática, dá bastante destaque à noção de taxa de variação. Assim, no capítulo Introdução ao Cálculo Diferencial I — Funções racionais e com radicais. Taxa de variação/Derivada — refere que devem ser desenvolvidas a noção e o cálculo da taxa de variação média e a noção e o cálculo da taxa de variação (valor para que tende a t.v.m. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples; devem ser dados exemplos concretos e, em particular, envolvendo velocidades e acelerações; deve ser dada uma interpretação geométrica da taxa de variação e a definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite) (DES, 1997, p. 27).

3.3. Limite

Os alunos têm um conceito de limite adquirido fora da escola. No dia-a-dia emprega-se a palavra limite com vários sentidos. Estes sentidos são, a maior parte das vezes, diferentes do conceito matemático. Cornu (1981) refere que os alunos a quem se vai ensinar a noção de limite têm modelos espontâneos desse conceito. O professor dá a definição matemática, com exemplos e teoremas em que essa definição funciona. Essa definição matemática não vai apagar as concepções anteriores do aluno. Pelo contrário, vai entrar em conflito com os modelos espontâneos dos alunos. Vai sofrer algumas modificações e transformar-se num modelo próprio, resultado dos modelos espontâneos e da definição matemática. Os erros que, a maior parte das vezes, os alunos cometem, em relação à noção de limite não são fruto do acaso ou de falta de atenção, mas sim a consequência lógica dos seus modelos próprios. Os modelos próprios têm um carácter evolutivo, vão-se tornando mais precisos, corrigem-se. Mas podem ficar desligados do modelo matemático durante muito tempo. Cornu procurou, através de testes diferentes, o significado que os alunos dão à palavra limite e à expressão "tende para" antes dos alunos receberem essa noção na sala de aula. Os mesmos testes foram dados a alunos depois de terem estudado o conceito. Cornu concluiu que a expressão "tende para" não faz parte do vocabulário dos alunos com o sentido de variação, antes destes estudarem o conceito de limite na aula. É mais habitual no vocabulário dos alunos a palavra limite, que designa qualquer coisa de estática, fixa. Muitas vezes, a palavra limite significa aquilo que separa duas coisas, outras vezes é o final. Para muitos alunos, a palavra limite não contém nenhuma ideia de variação, de movimento, de reaproximação desse limite. Em geral, os alunos não utilizam a palavra "limite" e a expressão "tende para" no mesmo contexto. Por exemplo, os alunos dirão que 0,9; 0,99; 0,999 .... "tem como limite 1", ou "tende para 0,999...". Para alguns alunos um conjunto ilimitado não tem limite. Reservam a palavra limite para os conjuntos em que o limite é atingido, e empregam a palavra "tende para" para os conjuntos em que o limite não é atingido. A investigação de Cornu, mostrou que os alunos, mesmo os mais avançados, não fizeram prevalecer a noção matemática de limite sobre os seus modelos espontâneos. Assim, Cornu concluiu que a noção de limite transporta muitas dificuldades reais de compreensão e que a definição matemática não é suficiente para apagar todas essas dificuldades.

Ainda Cornu (citado em Fiske, 1994) identificou alguns obstáculos cognitivos do conceito de limite—conhecimento que faz parte do repertório dos alunos e que tem sido usado satisfatoriamente no passado para resolver certos tipos de problemas, mas que prova ser insatisfatório nas novas situações—que interferem com o desenvolvimento nos alunos de imagens apropriadas desse conceito. Os limites são pensados em termos ou de infinitamente pequenos ou de infinitamente grandes. A linguagem, tal como "tende para" e "aproxima-se" sugere que um limite é qualquer coisa nunca atingida.

3.4. Tangentes e secantes

Quando as ideias são apresentadas num contexto restrito, o conceito imagem pode incluir características que são verdade nesse contexto, mas não o são em geral. As experiências dos alunos acerca da recta tangente a uma circunferência num ponto introduzem uma crença de que essa tangente é uma recta que toca o gráfico nesse ponto e não o "atravessa". O conceito de tangente que os alunos trazem para o estudo da Análise é, assim, fortemente influenciada pelo estudo da Geometria. Isto produz um conceito imagem que causa conflitos cognitivos quando são considerados casos mais extremos, tais como a tangente num ponto de inflexão que "atravessa" a curva, ou o caso da tangente numa extremidade (Vinner, 1983).

Num estudo conduzido por Vinner (1983) com alunos israelitas, quando se pediu aos alunos que desenhassem a recta tangente à curva representativa da função $y = x^3$, na origem, muitos traçaram a recta tangente de um dos lados da curva de modo a não a atravessar (figura 2.6). O conceito imagem dos alunos de recta tangente a uma curva num ponto parecia não incluir uma tangente horizontal, a não ser que se tratasse de um extremo relativo da função.

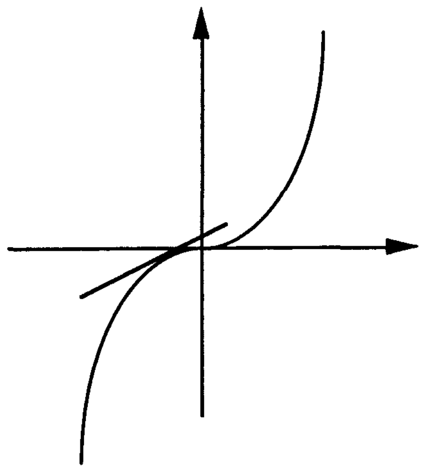


Fig. 2.6 - Recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero, traçada pelos alunos da investigação conduzida por Vinner (1983).

O processo da determinação da recta tangente a uma curva num ponto P como o limite das rectas secantes que passam por P e por um ponto Q sobre a curva que se aproxima de P, nem sempre se manifesta uma tarefa fácil aos alunos.

Numa das questões do estudo levado a cabo por Orton (1983, p. 245) que envolveu cento e dez alunos ingleses, perguntava-se o que acontecia com as rectas PQ quando o ponto Q se aproximava de P (figura. 2.7).

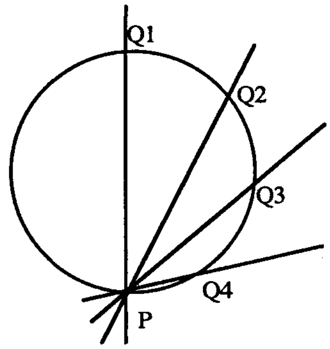


Fig. 2.7 - Figura do estudo de Orton (1983, p. 245)

A ideia da secante deslizando ao longo da curva tinha a intenção de abordar a diferenciação e foi considerada uma tarefa importante ao nível da compreensão da tangente como um limite. Parece bastante significativo que quarenta e três alunos (dos cento e dez entrevistados) tenham sido incapazes de dizer que a secante se tornava uma tangente, apesar do considerável encorajamento, através de questionamentos suplementares. A noção de secante parecia ser ignorada por muitos alunos. Estes pareciam apenas focar a sua atenção na corda PQ, ainda que as explicações e o diagrama tentassem garantir que isso não iria acontecer. Respostas insatisfatórias incluíram: "a linha torna-se mais pequena", "torna-se um ponto", "a área fica mais pequena", "desaparece". Orton concluiu que os alunos podem precisar de uma ajuda na compreensão da recta tangente como o limite do conjunto das rectas secantes.

A ideia geométrica de usar uma secante aproximando-se da tangente não é cognitivamente intuitiva para os alunos, no sentido que não ocorre espontaneamente (Tall, 1989).

3.5. Derivada

O estudo das derivadas que, em conjunto com o estudo dos integrais constituem a Análise, despertou o interesse dos cientistas quando estes se começaram a preocupar não só com as mudanças que se efectuam nas coisas, mas também pela maior ou menor rapidez com que as coisas mudam. Este desejo de medir e quantificar a variação conduziu, no século XVII, à noção de derivada.

Quando se olha para o gráfico de uma função contínua, um primeiro aspecto que pode saltar à vista é o sentido da sua variação — tem-se logo uma visão aproximada de intervalos em que a função é crescente, de intervalos em que a função é decrescente e de intervalos em que é constante. Olhando mais detidamente, um novo aspecto chama a atenção — o da rapidez com que a função varia. Esta intuição que temos da maior ou menor rapidez com que, num dado fenómeno, uma grandeza varia com outra, é traduzida pelo conceito de derivada — um dos mais importantes de toda a Matemática Contemporânea, Pura e Aplicada.

A introdução do conceito de derivada e do cálculo infinitesimal foi um dos conceitos que determinou o imenso êxito alcançado pela Matemática no estudo dos fenómenos naturais. São inúmeros os exemplos de questões concretas, oferecidas pelas ciências da natureza, em que intervém tal conceito. A necessidade de calcular velocidades instantâneas, rectas tangentes a curvas, máximos e mínimos de funções, torna imprescindível o estudo da noção de derivada de uma função, conceito que tem um papel central na análise de funções (monotonias, extremos, concavidades, gráficos) e na resolução de muitos problemas das mais variadas ciências (NCTM, 1991).

O Cálculo Diferencial no ensino secundário, em Portugal, tem sido baseado na noção de derivada, definida como o limite de um quociente e associada com a figura geométrica da recta tangente, como uma posição limite das rectas secantes. Nos novos programas (DES, 1997, p. 28), em relação ao tema—Introdução ao Cálculo Diferencial I, recomenda-se a "interpretação geométrica da taxa de variação e a definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite)".

O modo como os alunos compreendem funções está relacionado directamente com o modo como compreendem a conceito de derivada (Ferrini-Mundi e Lauten, 1993). Os autores consideram que, apesar de existir uma boa realização procedimental no cálculo de derivadas, a capacidade dos alunos para trabalhar com representações geométricas ou físicas de derivada é bastante limitada. Por exemplo, têm dificuldade em interpretar como é que as rectas secantes, deslizando ao longo de uma curva conduzem, no seu limite, à recta tangente.

Um estudo sobre a concepção que os alunos têm de derivada conduzido por Orton (1983) e que envolveu 110 alunos do último ano do ensino secundário, em Inglaterra, baseado em entrevistas individuais, mostrou que os alunos apresentavam:

- Um domínio razoável dos algoritmos em termos do cálculo de derivadas e primitivas, pelo menos para funções simples;
- Dificuldade significativa na conceptualização do processo limite que está na base das noções de derivada e integral. Por exemplo, quando se perguntou aos alunos o que acontecia às secantes PQ, quando o ponto móvel Q sobre a curva se aproximava do ponto fixo P, cerca de 50% dos alunos foram incapazes, mesmo quando fortemente induzidos a isso, de concluir que o processo conduzia à recta tangente à curva, no ponto P (figura 2.8);

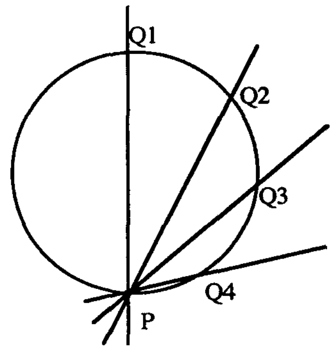


Fig. 2.8 - Figura do estudo de Orton (1983, p. 245)

- Dificuldades em usar representações gráficas;
- Dificuldades em atribuir significado aos símbolos.

Este sucesso nos algoritmos, opondo-se a uma certa fraqueza na interpretação de gráficos foi também referida por outros investigadores (Artigue, 1993; Tall, 1977).

Artigue (1991, p. 179) fez um estudo que envolveu oitenta e nove alunos franceses do primeiro ano de Matemática da Faculdade. Algumas das questões colocadas foram as seguintes:

Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 2.9.

- Em que pontos é que a função é diferenciável?
- Descreve o comportamento do gráfico.

Mais de metade dos alunos deram respostas incorrectas ou incompletas às questões.

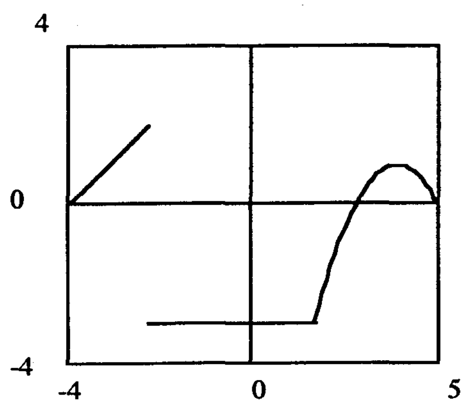


Fig. 2.9 - Figura do estudo de Artigue (1991, p. 179)

Os principais erros prenderam-se com uma certa confusão entre continuidade e diferenciabilidade ou entre diferenciabilidade e existência de derivadas laterais.

Outras investigações sobre a concepção que os alunos têm de derivada e sobre os processos de derivação, foram levadas a cabo por Alibert *et al.* (1987); Artigue e Viennot, (1987); Artigue *et al.* (1989), (citados em Artigue, 1991).

No estudo conduzido por Alibert *et al.*, os questionários respondidos por oitenta e cinco alunos, revelaram uma diferença significativa entre o modo como os alunos descrevem o conceito de derivada e o modo como o aplicam. A maneira como descrevem o conceito é influenciada pela aproximação através da recta tangente, de acordo com a definição que lhes foi ensinada. A nível da actuação, a derivada perdia o seu papel funcional, a condição de aproximação desaparecia e era substituída por algoritmos algébricos. Em todos os casos, predominaram os procedimentos analíticos, contrastando com o ponto fraco nos modos gráficos e com a falta de significado da noção de limite.

Alibert *et al.* (citados em Artigue, 1991), depois de reinterpretarem os resultados desse estudo, consideraram que a predominância dos procedimentos algébricos eram o resultado do processo educacional. Segundo os investigadores, utilizam-se poderosos algoritmos algébricos (cálculo de derivadas, derivadas parciais, matrizes, primitivas) e potentes teoremas, que reduzem as considerações teóricas a técnicas algébricas. Esta algoritmização algébrica prematura, por um lado, dá um papel demasiado privilegiado ao cenário algébrico e, por outro, tende a escoar os procedimentos de derivadas e integrais do seu real significado.

Em relação aos alunos do primeiro ano de Análise, Artigue e Viennot (citados em Dreyfus, 1990) chegaram à conclusão que: os alunos tinham imagens geométricas muito pobres dos conceitos; o seu pensamento funcional era fraco; podiam calcular derivadas mas não sabiam trabalhar com aproximações lineares (eles nem compreendiam a derivada como uma aproximação). Os autores concluíram que, para estes alunos, uma função parecia ser mais um processo do que um objecto, o que lhes dificultava compreender a diferenciação e a integração como operações. Uma operação precisa de operar sobre alguma coisa; no caso da diferenciação e integração, o objecto sobre o qual se opera é uma função. Se o objecto não existe, como imaginar o que é a operação ou o que é que ela faz?

Os alunos aprendem procedimentos de cálculo (calculam limites, derivadas, etc.) num nível puramente algorítmico que, muitas vezes, é construído sobre conceitos imagens muito pobres; a visualização é rara e, se ocorre, a ligação cognitiva entre as representações visual/gráfica e analítica/algébrica é um ponto de grande dificuldade (Dreyfus, 1990).

Num estudo conduzido por Vinner (1992) que envolveu 119 alunos israelitas (estes alunos tinham acabado de cumprir o serviço militar), foi colocada a questão do que era uma derivada.

As respostas a essa questão foram classificadas nas seguintes categorias:

1. Uma concepção correcta da derivada como um limite (6%). Nesta categoria foram incluídas respostas do tipo: "lim [f(x+h) - f(x)]/h quando h tende para zero".

2. Uma concepção correcta de derivada no sentido visual (25%). Nesta categoria foram incluídas respostas do tipo:"a derivada é uma função que indica o declive da função original em cada ponto"; "a derivada é o declive da parte ascendente ou descendente de uma função num certo momento".

3. Uma concepção instrumental de derivada refere os métodos para obter uma derivada ou as suas aplicações, mas ignoram o seu significado (23%). Exemplos: "a derivada é uma função obtida de uma dada função através de regras matemáticas fixas"; "a derivada é uma subfunção de uma função original, por exemplo: $y = 2x^3+3x$, $y' = 6x^2 + 3$"; "uma derivada é um meio de investigar os domínios de crescimento ou de decrescimento de uma dada função"; "é uma fórmula matemática".

4. Uma referência ao conceito de limite vaga e inaceitável (8%). Exemplos: "é uma função a tender para mais infinito"; "É o lim f(x)/dx, quando dx tende para zero".

5. Uma referência ao aspecto visual de derivada vaga e inaceitável (26%). Exemplos: "É uma função que é uma tangente a outra função"; " é a equação da tangente a uma dada função"; "A

derivada é uma função cuja representação gráfica é uma tangente"; "o ângulo que a função forma com o eixo dos xx".

6. Respostas que parecem totalmente irrelevantes ou não respondidas (12%).

As categorias 4, 5 e 6 (46%) foram as que preocuparam o autor por se tratar de formulações vagas, imprecisas e sem significado. Os alunos pareciam lembrar-se de palavras, símbolos ou mesmo de figuras relacionadas com o tópico, mas tudo isso não fazia qualquer sentido, pois eram parte da comunicação sem significado que os alunos tentam, muitas vezes, utilizar nas aulas ou nos exames para tentarem mostrar que sabem alguma coisa, uma impressão que têm que dar para sobreviver.

Vinner sublinhou ainda que as pessoas se lembram mais dos aspectos visuais do conceito de derivada do que dos seus aspectos analíticos. De acordo com este investigador, isto é resultado da natureza humana. A memória trabalha melhor com figuras do que com palavras. Assim, forçar a memória a acumular os aspectos analíticos de um conceito em vez dos aspectos visuais, talvez seja contra a natureza da memória. Vinner levanta algumas questões: Do que é que os alunos se lembram em relação aos conceitos mais elementares dos seus cursos de Matemática, depois de passarem alguns anos? Quais são as suas formas mais comuns de retenção (visual, analítica, instrumental, relacional)? Até que ponto são confusos os conceitos que retêm? O que pode ser considerado como o coeficiente eficiente da aprendizagem das matemáticas?

Sullivan (1995) levou a cabo uma avaliação formativa de um currículo que deu ênfase ao desenvolvimento de uma compreensão conceptual e intuitiva dos conceitos de Análise usando representações numéricas, gráficas e algébricas desses conceitos, com alunos da Universidade da Colombia. Foram investigadas as seguintes questões: os alunos que estudaram as derivadas usando esse currículo serão capazes de:

(1) Traçar gráficos de funções?

(2) Inferir propriedades das funções a partir dos seus gráficos?

(3) Inferir propriedades da função derivada a partir do gráfico de uma função?

(4) Inferir as propriedades de uma função a partir do gráfico da sua derivada?

(5) Inferir as propriedades de uma função a partir da sua tabela de valores?

(6) Inferir propriedades da derivada de uma função a partir da sua tabela de valores?

(7) Estimar a derivada de uma função num ponto, dada a tabela de valores de uma função?

(8) Estimar a derivada de uma função num dado ponto?

Para levar a cabo este estudo foram feitas duas entrevistas individuais, de noventa minutos cada uma a dez alunos voluntários de entre os trinta e um alunos da aula. A investigadora analisou as entrevistas para perceber a compreensão conceptual de derivada e o uso de várias representações. Os alunos tiveram sucesso nas tarefas desenvolvidas. Segundo Sullivan, merecem destaque dois resultados sugeridos pelo estudo. Primeiro: os alunos tinham tendência a ver separadamente cada representação. Eles raciocinavam dentro de uma representação, interpretavam e extraiam conclusões. Raras vezes raciocinaram entre representações diferentes e tiraram poucas conclusões sobre uma representação a partir da outra. Segundo: os alunos mostraram uma preferência pela representação algébrica.

Aspinwall (1994) salientou a importância do ensino focado nas representações gráficas e analíticas de funções e derivadas. Concluiu que os alunos (Universidade da Florida) a quem foram ensinadas apenas regras e procedimentos, chegavam às aulas de Análise sem a capacidade de analisar gráficos e faltava-lhes uma compreensão dos fundamentos conceptuais de declive e de recta tangente. O autor acrescentou ainda que os estudos baseados unicamente em representações analíticas de funções e suas derivadas produziam, muitas vezes, apenas compreensões na maneira de agir e que, o estudo das representações gráficas de funções e suas derivadas tinham o potencial de produzir uma compreensão mais rica daquela que era alcançada apenas por estudos analíticos.

Num estudo levado a cabo por Fiske (1994) foi dado o conceito de derivada, usando dois princípios de organização distintos, a duas turmas de uma escola secundária americana. Aos vinte e sete alunos de uma das turmas, foi dada a noção de função diferenciável num ponto através da ideia do aspecto local de linha recta — chamaram a este grupo de alunos, o grupo da linearidade local. Aos vinte e oito alunos da outra turma, foi proporcionado um ensino baseado no processo limite das secantes aproximando-se da tangente — chamaram a este grupo, o grupo da secante-tangente. As aulas foram dadas pelo mesmo professor. Ambas as turmas exploraram os mesmos exemplos e contra-exemplos de funções diferenciáveis e usaram, sistematicamente, ferramentas computacionais. À partida, foi colocada a hipótese de que os alunos da linearidade local poderiam alcançar uma compreensão diferente e mais completa do conceito de derivada do que os alunos do grupo secante-tangente. Os instrumentos de análise consistiram num pré-teste, num pós-teste, em entrevistas aos alunos e na observação de aulas. A hipótese de investigação não foi confirmada. Com base no pré-teste, o investigador refere que o grupo da secante-tangente iniciou o estudo do tema com menor compreensão dos conceitos do que o grupo da linearidade local. Os dois grupos alcançaram resultados semelhantes no pós-teste. O grupo da linearidade local construiu uma compreensão mais forte dos conceitos de declive, taxa de variação, derivada e diferenciação simbólica do que o grupo da secante-tangente. Os alunos deste grupo esboçaram melhor os gráficos das derivadas de funções do que o grupo da linearidade local. As entrevistas efectuadas aos alunos confirmaram que ambos os grupos alcançaram uma forte representação visual da derivada como função. Estes estudantes compreenderam a função derivada como um objecto. Embora alguns usassem o processo limite da recta secante aproximando-se da recta tangente como argumento, nenhum deles conseguiu explicar formalmente este processo. De facto, para estes alunos encontrar a derivada de uma função simbolicamente parecia ser uma actividade separada de encontrar a derivada da função na sua representação gráfica. A representação da derivada como o limite de um quociente sugeriu aos alunos que a recta secante nunca atingia, na realidade, a recta tangente, uma vez que era necessário dois pontos para encontrar o declive. O traçado da função derivada causou alguns problemas quando a função era contínua mas não tinha derivada num determinado ponto. Tentaram unir os dois ramos da função derivada separados no ponto em que a função não tinha derivada finita ou definiram como sendo zero, a derivada nesse ponto. Fiske concluiu ainda que permaneceu incompleta nos alunos a transição da ideia de recta tangente desenvolvida no estudo da Geometria para a ideia de tangente na Análise.

O estudo de Heid (1988) envolveu trinta e nove alunos americanos da Faculdade de um curso de Análise, como grupo experimental e cem alunos como grupo de controlo. O estudo desenvolveu-se durante quinze semanas. Durante as doze primeiras, os alunos do grupo experimental estudaram os conceitos de Análise usando programas de gráficos e de manipulação simbólica, em computador. Apenas nas três últimas desenvolveram destrezas de cálculo. O grupo de controlo ocupou as quinze semanas neste tipo de actividades. Com base em entrevistas e no resultado de testes, Heid concluiu que os alunos do grupo experimental fizeram conexões adequadas entre o conceito de derivada e a sua definição matemática. Utilizaram, frequentemente, o conceito básico de derivada para raciocinar sobre outros conceitos: forma da curva, concavidade, segunda derivada e aplicações. Os alunos do grupo de controlo não evidenciaram qualquer esforço para raciocinar a partir de princípios básicos. Quando os entrevistados da classe experimental falavam sobre limites, funções, derivadas, e somas de Riemann, usaram palavras próprias. Estas conexões entre conceitos não foram encontradas nas transcrições do grupo de controlo.

Os entrevistados do grupo experimental, na sua maioria, demonstraram uma boa compreensão da maior parte dos conceitos do curso. Evidenciaram, no entanto, algumas dificuldades com os conceitos de limite e de taxa de variação. Nenhum dos entrevistados, de ambos os grupos, mostrou uma compreensão clara desses conceitos. A investigadora não ficou muito surpreendida com estes resultados não só por considerar tratar-se de conceitos complexos, mas também porque lhes foi dedicada pouca atenção durante o curso.

Heid concluiu que os alunos do grupo experimental falaram dos conceitos de cálculo com mais detalhe, mais clareza e mais flexibilidade do que os alunos do grupo de controlo. Aplicaram os conceitos de cálculo de uma forma mais apropriada e mais espontaneamente.

As representações gráficas podem desempenhar um papel importante na compreensão matemática dos conceitos. O papel do pensamento visual é tão fundamental para a compreensão da Análise que é difícil imaginar que os alunos tenham sucesso sem uma exploração visual dos conceitos.

4. Ensino/aprendizagem em ambiente computacional

Embora os computadores e calculadoras teoricamente tenham entrado na sala de aula há cerca de 30 anos, apenas recentemente têm sido conduzidos estudos no sentido de perceber os efeitos da sua utilização nas práticas de ensino. A introdução das tecnologias na sala de aula pode mudar completamente o ensino da Matemática.

Abrantes (1994, p. 132) afirma que, em muitos países, a aula *típica* de Matemática " tem sido marcada por uma sequência em que o professor chama alguns alunos para corrigirem o trabalho de casa, *dá* a nova matéria, resolve no quadro alguns exemplos de aplicação e propõe aos alunos que comecem a treinar o novo tipo de exercícios". Trata-se de numa sequência estática de acontecimentos. Esta situação está em processo de mudança. As ferramentas computacionais podem desempenhar um papel importante nesta mudança.

Junqueira (1995) refere que a realização de actividades em pequenos grupos, com recurso a ambientes computacionais, altera a rotina habitual das aulas de Matemática. Acontecem novas interacções entre os alunos, entre os alunos e o professor, entre os alunos e o computador, que se reflectem nos processos de aprendizagem. Assim, em contextos computacionais muda quer o modo como os professores ensinam quer o modo como os alunos aprendem. A responsabilidade da aprendizagem é compartilhada pelos professores e pelos alunos. Estes formulam as suas próprias hipóteses, testam-nas e fazem generalizações. Os alunos podem envolver-se em actividades de mais alto nível. O computador permite a realização de diversas experiências, estimula a formulação de conjecturas encorajando, deste modo, o estudo experimental de conceitos matemáticos.

Fey (1991), dá um grande destaque à facilidade proporcionada pelos computadores em passar de uma forma de representação da informação para outra, à medida que se procura a compreensão conceptual de um problema e da sua solução. Existem, segundo este autor, várias razões pelas quais as múltiplas representações baseadas no computador são prometedoras:

a) O carácter dinâmico das representações de ideias e procedimentos matemáticos. Por exemplo, as mudanças no gráfico de uma função correspondentes às alterações dos parâmetros da sua expressão analítica dificilmente poderão visualizar-se eficazmente sem o computador.

b) A flexibilidade das representações em se adaptarem a propósitos concretos do indivíduo.

c) A representação gráfica constitui um intermediário para a abstracção.

d) A versatilidade gráfica do computador permite criar representações matemáticas novas.

e) As representações computacionais constituem poderosos instrumentos para a resolução de problemas.

"As representações de ideias matemáticas e de procedimentos no computador podem tornar-se dinâmicas de um modo que nenhum texto ou diagrama no quadro consegue. Modelos em computador de transformações geométricas ou das mudanças num gráfico de função correspondentes a mudanças de parâmetros numa expressão que define uma função fazem algo que é muito difícil mostrar de outro modo. O computador desempenha uma espécie de intermediário para a abstracção" (Ponte, 1991, p. 61).

Os cálculos à mão são uma perda de tempo e, no final, os alunos podem ter esquecido os seus objectivos iniciais bem como as inter-relações entre os conceitos matemáticos envolvidos (Heid, 1988). O computador pode ser usado para fornecer os resultados da execução de algoritmos, dando aos alunos um acesso rápido a vários exemplos do conceito.

Os autores dos Programas da Reforma de Matemática do Ensino Secundário afirmam que: "O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a alunos e professores, sugerindo-se a sua utilização sempre que possível" (DGEBS, 1991b, p. 34).

O uso de tecnologias no ensino da Matemática e, em particular, no estudo da Análise pode aumentar o comprometimento dos alunos com os conteúdos programáticos e dar-lhes uma oportunidade de interagirem para discutir e comunicar Matemática. As aulas dinamizadas com recurso a ferramentas computacionais, podem fazer com que muitos alunos se envolvam mais activamente no processo de fazer Matemática.

4.1. O papel das ferramentas computacionais no estudo da Análise

Nas *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991, p. 215) refere-se que: "O ensino [do Cálculo Infinitesimal] deve ser altamente exploratório e baseado em experiências numéricas e geométricas que capitalizem o uso da calculadora e do computador. As actividades devem ter em vista fornecer aos alunos bases conceptuais firmes para o cálculo infinitesimal, em vez do desenvolvimento de técnicas manipulativas".

Mais do que, talvez, em quaisquer outros tópicos da matemática elementar, a tecnologia afecta o ensino e aprendizagem das funções e dos gráficos. Através das tecnologias, os alunos têm acesso, muito mais cedo, a noções mais complexas relacionadas com gráficos. A falta de familiaridade ou competência com técnicas algébricas não impede os alunos de explorar gráficos complicados no computador nem o entusiasmo no desenvolvimento de actividades complexas.

As ideias relacionadas com a variação (crescimento, decrescimento, constância, máximos, mínimos), e com a variação na variação (variação rápida e lenta, taxa de variação, regularidade, continuidade), podem ser compreendidas mais facilmente e melhor a partir de representações gráficas (Ponte, 1990).

O *software* que liga as representações analíticas e gráficas de funções está proliferando por, pelo menos, três razões: (a) necessidade de aumentar a ênfase dada aos gráficos no currículo (Fey, 1984); (b) ser aceite que representações visuais apropriadas ajudam a dar significado e promovem a aprendizagem, no sistema de símbolos com que os alunos se deparam (Kaput, 1986); e (c) a tecnologia computacional adapta-se bem a esta aplicação.

Ottinger (1994) conduziu um estudo com alunos do primeiro ano da Faculdade — trinta e nove alunos no grupo experimental e cinquenta e quatro no grupo de controlo. Ottinger considerou que as competências de papel e lápis, muitas vezes, atrapalhavam os alunos e causavam-lhes dificuldades na aplicação dos algoritmos. Segundo este investigador, através do uso de calculadoras gráficas e de computadores é possível realçar o desenvolvimento de conceitos e deixar que os procedimentos sejam aprendidos mais tarde. O objectivo deste estudo era investigar o efeito da aprendizagem de conceitos antes da aprendizagem de procedimentos. Durante 18 semanas, os alunos do grupo experimental usaram calculadoras científicas, calculadoras gráficas e ferramentas computacionais. Nas últimas 6 semanas, esses alunos desenvolveram competências tradicionais de cálculo. O grupo de controlo usou apenas calculadoras científicas e gastou as 24 semanas do curso no desenvolvimento dessas competências tradicionais. Os questionários e as entrevistas mostraram que os alunos do grupo experimental compreenderam melhor os conceitos de variável, função e equação e foram capazes de aplicar melhor esses conceitos. Assim, Ottinger concluiu que o conhecimento procedimental não é necessariamente um pré-requisito para a compreensão conceptual e que os procedimentos podem ser aprendidos mais rapidamente se há uma base conceptual forte sobre a qual se organiza o conhecimento procedimental. Ottinger afirmou ainda que o uso de calculadoras e computadores pode promover uma compreensão mais rica dos conceitos de Álgebra.

A questão fundamental da investigação de Sheets (1993) era verificar de que modo a aprendizagem e a resolução de problemas com apoio nas ferramentas computacionais ajudava os alunos a desenvolver a capacidade de resolver problemas com funções matemáticas. Esta investigação contribuiu para a verificação da conjectura de que o uso de múltiplas representações proporcionadas pelo computador no ensino da Matemática melhora a compreensão dos conceitos. As conclusões deste estudo sugeriram que muitos estudantes que completam os programas de Matemática da escola secundária tradicional não chegam a compreender conceitos e procedimentos fundamentais que dizem respeito a funções. Alunos que estudaram conceitos de Análise com um programa de computador demonstraram grande flexibilidade em raciocinar a partir das múltiplas representações de funções.

Schwingendorf *et al.* (1992) concluíram que a utilização de computadores pode produzir um progresso substancial no desenvolvimento da compreensão do conceito de função. Os alunos do grupo experimental desenvolveram um sentido de função mais profundo do que aqueles a quem foi ministrado um ensino baseado em métodos tradicionais. Referem ainda que os alunos que trabalharam com o computador desenvolveram um conceito imagem e um sentido de função mais claro do que os da classe tradicional.

Heid (1988) conduziu um estudo sobre os efeitos de concentrar a atenção inicial nos conceitos e aplicações do cálculo, relegando os procedimentos de rotina para o computador. O estudo desenvolveu-se durante quinze semanas e envolveu trinta e nove alunos americanos do primeiro semestre do Curso de Análise. Estes alunos estudaram os conceitos de Análise a partir de uma abordagem gráfica, usando programas de computador. O desenvolvimento de destrezas de cálculo tradicional (cálculo de derivadas, etc.) foi protelado até às últimas três semanas. O grupo de controlo era composto por cem alunos que frequentavam um curso de Análise semelhante. Os alunos deste grupo não usaram tecnologias e o seu ensino centrou-se no desenvolvimento de destrezas algorítmicas. Heid concluiu que os alunos do grupo experimental mostraram uma melhor compreensão conceptual, sem perda digna de nota das competências tradicionais de cálculo. As actividades que caracterizaram o curso experimental incluíram: fazer, defender e debater conjecturas matemáticas; interpretar e raciocinar sobre representações simbólicas e gráficas; sugerir e justificar modelos matemáticos. Com um acesso constante à manipulação automática de símbolos algébricos, os alunos e professores concentraram-se nos conceitos, resolução de problemas e modelação matemática. Os gráficos desempenharam um papel central. Os alunos examinaram uma grande variedade de gráficos gerados por computador, raciocinaram sobre esses gráficos, estudaram as semelhanças, diferenças e conexões entre esses gráficos. Como suplemento da análise dos gráficos gerados por computador, os alunos construíram os seus próprios gráficos de funções, usando informação gerada por computador sobre os zeros e sobre outros valores das derivadas. Analisaram como é que as propriedades dos gráficos de funções se reflectiam nos gráficos das suas funções derivadas. No final do curso, a sua experiência com gráficos foi muito além da que é atingida, normalmente, pelo estudo tradicional de gráficos a partir de equações. No curso tradicional, o estudo das derivadas e declives, embora ostensivamente completo, proporcionou aos alunos significados incompletos dos conceitos envolvidos.

Heid refere que a grande diferença no desenvolvimento de conceitos no grupo experimental e no grupo de controlo foi a grande variedade de representações usadas para explorar e explicar o significado dos conceitos. Segundo Heid, tipicamente os cursos de Análise sublinham a representação simbólica dos conceitos. As discussões na sala de aula, as tarefas e exames têm como objectivo ver a capacidade dos alunos para tirarem conclusões sobre conceitos na base de sequências habituais de manipulação de símbolos algébricos. Quando se lhes colocam questões que dependem de formulações não simbólicas (gráficos, conjuntos de valores, tabelas, aplicações), frequentemente, começam por reduzir o problema a símbolos algébricos ou fórmulas. O raciocínio exigido é feito dentro do contexto dos símbolos e fórmulas e os resultados são traduzidos para o contexto original. De um modo semelhante, quando os alunos traçam o gráfico de funções, realizam uma determinada sequência de passos algébricos na fórmula da função e traduzem esses resultados na forma da curva que representa a função. A tomada de decisão ocorre dentro do contexto da manipulação algébrica.

O currículo experimental não só usou uma grande variedade de representações do conceito, como também encorajou os alunos a raciocinar dentro dessas representações. Os computadores diminuíram o tempo e atenção usualmente utilizada nas competências de cálculo e forneceram dados concretos para a discussão de ideias. Forneceram dados em que os alunos basearam os seus raciocínio. Exibiram exemplos e contra-exemplos que ajudaram a corroborar ou não conjecturas feitas.

Segundo Heid, os computadores deram flexibilidade à análise de problemas. A fácil exibição de conceitos em várias representações tornou possível a realização de problemas mais difíceis, abriu caminhos para explorar vários métodos de solução para problemas simples.

Ellison (1993) investigou o desenvolvimento cognitivo dos alunos sobre o conceito de derivada num ambiente educativo enriquecido por calculadoras gráficas e por computadores. Os alunos utilizaram o programa *A Graphic Approach to the Calculus*, de David Tall. O estudo envolveu alunos de duas turmas de Análise e de Geometria Analítica e foi dada ênfase às múltiplas representações e às conexões entre elas. Foram feitas entrevistas de uma hora aos dez alunos seleccionados nas duas turmas. Segundo Ellison, o ambiente tecnológico afectou positivamente a capacidade dos alunos para construírem um conceito imagem adequado de derivada. A maior parte deles construiu conceitos imagens que incluíam as principais características da definição de derivada. Todos os entrevistados conseguiram, no final do semestre, distinguir gráficos de funções dos gráficos das suas funções derivadas. Contudo, apenas seis dos dez alunos conseguiram esboçar adequadamente o gráfico de uma função derivada, razoavelmente complicada, a partir do gráfico da sua função primitiva. Perante o gráfico da função derivada, apenas quatro conseguiram descobrir as características da função primitiva. Embora oito estudantes não tenham esquecido a definição formal de derivada, apenas cinco deles conseguiram ligar a definição formal de derivada com a imagem visual do limite do declive das rectas secantes.

Palmiter (citado em Fiske, 1994) comparou as compreensões conceptuais e de cálculo atingidas pelos trinta e oito alunos que usaram ferramentas computacionais no estudo de alguns conceitos de Análise, com as dos trinta e nove sujeitos a uma abordagem tradicional dos conceitos, de papel e lápis. Os alunos que trabalharam com ferramentas computacionais exploraram os conceitos de Análise durante cinco semanas. Os outros dispenderam dez semanas para abordar os mesmos conteúdos. No final, os alunos dos dois grupos foram sujeitos ao mesmo teste. Os que utilizaram ferramentas computacionais obtiveram resultados significativamente melhores.

Tall (1987) fez uma pesquisa para testar a hipótese de que programas de computador interactivos, encorajando investigações dos alunos através de uma grande variedade de exemplos e contra-exemplos, podem ser usados para desenvolver nos estudantes conceitos imagens mais ricos. Foram propostas actividades, usando programas de computador capazes de ampliar gráficos até ficarem parecidos com uma linha recta, a três classes experimentais de alunos de dezasseis anos. Estas actividades serviram de base para a discussão, na aula, em pequenos grupos, da relação entre os conceitos de declive e de recta tangente. Alunos de cinco turmas, a quem foram explicados esses conceitos com uma abordagem tradicional, formaram o grupo de controlo.

Em relação aos gráficos (figura 2.10), foram colocadas aos alunos de ambos os grupos as seguintes questões:

1. Pode calcular a derivada das funções no ponto x = 0?
2. Os gráficos das funções têm tangente no ponto x = 0?

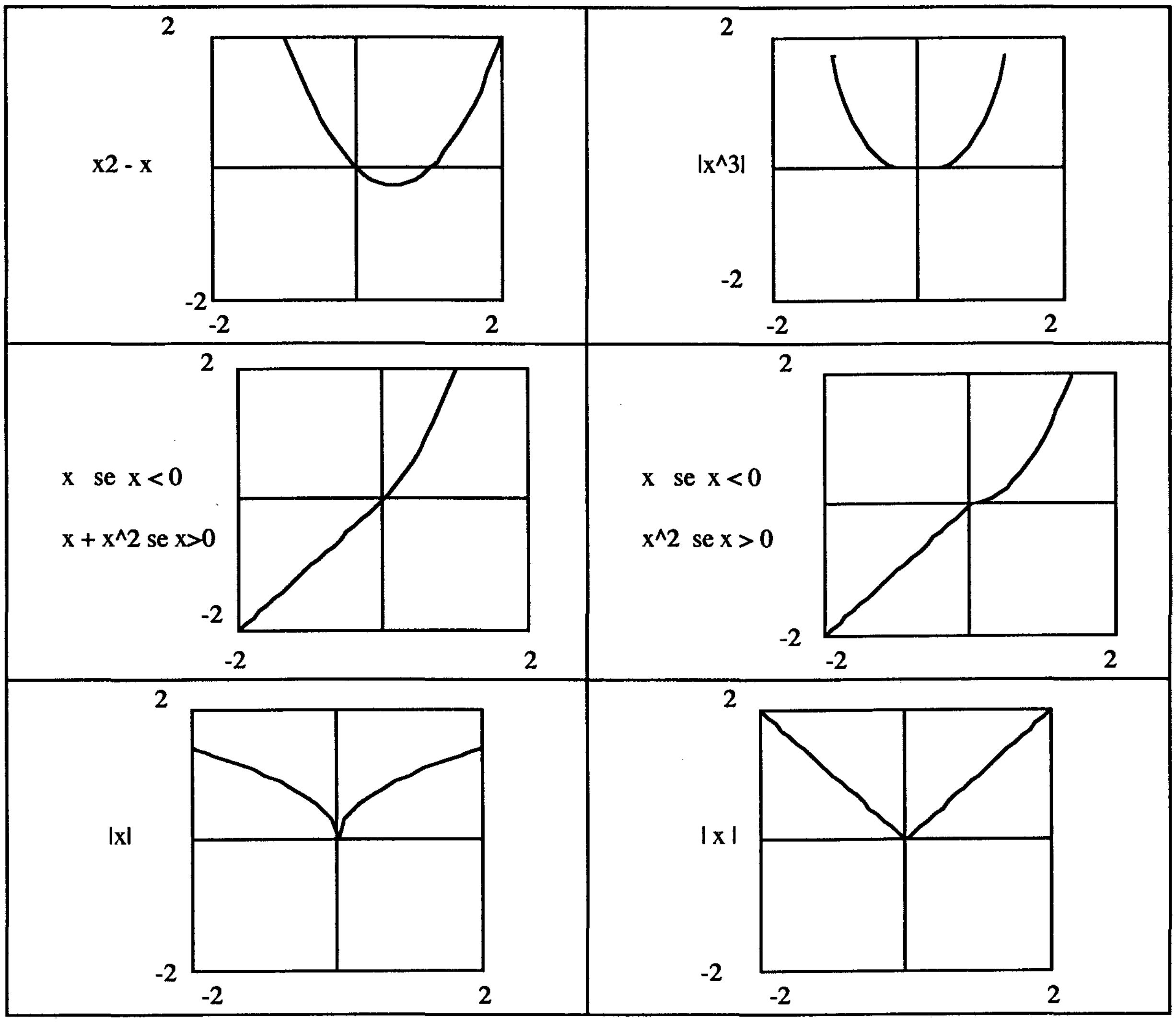


Fig. 2.10 - Gráficos do estudo de Tall (1987, p. 71).

Os do grupo experimental tiveram mais êxito nas respostas dadas a essas questões, nomeadamente nos casos em que a função era definida por ramos. As experiências do grupo experimental ajudaram os alunos a desenvolver um conceito imagem mais coerente, com capacidades de transferir o conhecimento para novos contextos.

Cabe-nos sublinhar a natureza de alguns programas que permitem o estudo de gráficos e de funções. Estes "aguardam" que o utilizador decida como e quando os quer usar. Assim, é atribuído um papel activo ao aluno no processo de ensino aprendizagem, levando a um ambiente de trabalho na aula pautado pela discussão e exploração de situações que articulam, por exemplo, a vertente gráfica com a analítica.

Goldenberg (citado em Tall, 1987) refere que o senso comum defende a ideia de que o uso do que mais do que uma representação de uma função ajudará os alunos a compreender o que permanece menos claro, quando é usada apenas uma representação. Segundo Goldenberg, as múltiplas representações apresentadas reflectidamente aumentam a redundância e, assim, podem reduzir ambiguidades que podem ser inerentes a qualquer representação simples. Tomadas em conjunto, as múltiplas representações podem aperfeiçoar a fidelidade da mensagem completa. O autor diz que estes argumentos teóricos são razoáveis, mas que podem não ser válidos. O seu questionamento é baseado nas concepções erróneas que os alunos têm quanto à natureza dos gráficos. Goldenberg concluiu que o *software* pode, por vezes, levar a essas concepções. Os alunos, quando confrontados com gráficos de computador, muitas vezes ficam com a noção, por exemplo, de que são apenas os parâmetros que variam.

Outras investigações suportam este tipo de preocupação com as ferramentas computacionais. Por exemplo, Nachmias e Linn (citados em Tall, 1987) mostraram que uma representação gráfica gerada por computador de uma curva de líquido a arrefecer em tempo real, foi mal interpretada por 30% dos crianças envolvidas no estudo, porque os grandes *pixels* sobre o ecrã davam a impressão que o líquido permanecia a uma temperatura constante durante algum tempo e que, de repente, diminuía um pouco (para o nível do próximo *pixel*). Estes alunos acreditavam em absoluto na veracidade do computador.

A tecnologia coloca enormes poderes nas mãos dos alunos, mas é necessária uma investigação séria para ganhar perspicácia nas concepções geradas pelo seu uso.

Tall (1985) afirmou que a utilização de Organizadores Genéricos no estudo das derivadas através do computador pode aumentar a interpretação geométrica do conceito, sem afectar a manipulação formal.

Segundo Tall e Thomas (1989) um Organizador Genérico é um ambiente ou micromundo que permite que se manipule exemplos e contra-exemplos de um conceito específico ou de um sistema de conceitos relacionados da Matemática. A intenção é ajudar o aluno a adquirir experiências que lhe poderão fornecer uma estrutura cognitiva na qual possa reflectir e, a partir da qual, possa construir conceitos mais abstractos. O termo Genérico significa que a atenção é dirigida para certos aspectos dos exemplos que incluem um conceito mais abstracto. Exemplos concretos de tais organizadores incluem material Cuisenaire e blocos Dienes. Os mesmos princípios são incluídos no programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus* (Tall, 1985): incluem estruturas teóricas que o utilizador pode compreender através do Organizador Genérico, em exemplos específicos. A existência de tais estruturas não garantem que o utilizador abstrairá o conceito geral. Para ajudar o aluno a tirar o melhor partido do sistema e para evitar o desenvolvimento de concepções erróneas, um agente exterior como o professor, um livro de texto, são úteis para sublinhar características genéricas.

A utilização de contra-exemplos é de grande importância, particularmente para os conceitos de ordem mais elevada tais como convergência, continuidade ou diferenciabilidade, onde o conceito definição é tão complexo que os alunos, muitas vezes, têm dificuldade em trabalhar com ele quando lhes falta apoio (Tall e Thomas, 1989). Para os autores, os Organizadores Genéricos podem ser usados para se obter um domínio mais holístico dos conceitos, ligando-os de um modo diferente da tónica da aprendizagem sequencial dos processos da Matemática no currículo tradicional. O plano é usar um contexto global/holístico que proporcione um contexto que leve a compreensões relacionais do processo lógico/sequencial. A combinação dos modos complementares de aprendizagem global/holística e lógico/sequencial é designada por versátil (Brumby, 1982, citado em Tall, 1989).

Os Organizadores Genéricos, como já se disse, têm a intenção de ajudar o aluno na abstracção de conceitos mais gerais a partir de propriedades genéricas de exemplos e da sua diferenciação dos contra-exemplos. Esta abstracção é um processo dinâmico. Os atributos do conceito são, numa primeira fase, abordados através de num exemplo simples; o conceito vai sendo sucessivamente expandido e refinado, a partir da introdução de uma sucessão de exemplos. O professor é um elemento vital deste processo, actuando como um mentor, ajudando os alunos a ver propriedades genéricas de exemplos, demonstrando o uso de Organizadores Genéricos e encorajando-os a explorar o *software* através de propostas e actividades adequadas. O professor usa o *software* para discutir ideias com os alunos, ajudando-os a enriquecer as suas concepções.

O programa a *Graphic Approach to the Calculus* oferece dois Organizadores Genéricos para introduzir o conceito de derivada. O primeiro é um programa que permite que se observe o que acontece quando os gráficos são ampliados. Muitos gráficos parecem menos curvos quando sujeitos a várias ampliações. O micromundo é limitado porque, virtualmente, todas as funções que podem ser lançadas têm a propriedade "localmente recta" e pode ser necessária ajuda para gerar contra-exemplos tais como $y = | x^2 - 1 |$ ou $y = | \sin x |$. Mesmo estas funções apenas não são "localmente rectas" em pontos isolados. Assim, torna-se necessária uma discussão posterior e a apresentação de contra-exemplos. Depois de usar este Organizador, o aluno tem a possibilidade de olhar para um gráfico, aumentá-lo mentalmente e "ver" variar o seu declive. O segundo Organizador permite sobrepor ao gráfico de uma função **f** uma representação visual das várias secantes passando pelos pontos (x, f(x)) e (x+h, f(x+h)), à medida que **h** se vai tornando cada vez menor. Permite ainda determinar a derivada da função em vários pontos da curva. O número de pontos nos quais o programa determina a derivada depende do valor de **h** dado pelo utilizador. Obtem-se a sobreposição dos gráficos da função e da sua função derivada. Este processo ajuda o aluno a ver uma figura estática de um gráfico como uma entidade dinâmica. Assim, o conceito imagem da noção de derivada de uma função e de função derivada é gerada com ambos os aspectos dinâmico e estático: é não só um processo como também um objecto.

Em resumo: A revisão de literatura focou o conceito de função, o papel da representação gráfica e da visualização, a compreensão dos conceitos de Análise pelos alunos e, por último, o ensino e aprendizagem em ambiente computacional.

Embora, quando os alunos chegam ao estudo da Análise, já tenham aprendido muitos dos conceitos subjacentes a esse estudo, podem não ter flexibilidade para utilizar esses mesmos conceitos. Os conceitos imagens de função, declive, taxa de variação, limite, secante e tangente são, frequentemente, simples e determinadas contextualmente. O conceito imagem de uma função como uma fórmula, a percepção local e linear de declive e taxa de variação, o ver o limite como estático e algorítmico e o conceito geométrico euclideano de tangente servem como um fundamento débil do estudo da derivada. A incapacidade de ligar as representações simbólicas destes conceitos fundamentais com representações visuais suplementares interferem no desenvolvimento da compreensão do aluno.

Os exemplos usados para ilustrar o conceito de função são usualmente e, por vezes, exclusivamente funções cuja regra de correspondência é dada através de uma fórmula. Assim, quando se pede a definição de função, os alunos podem dar uma resposta completamente formal e abstracta, mas voltam ao comportamento determinado pela concepção da fórmula, quando estão a trabalhar na identificação ou construção de tarefas.

De acordo com alguns investigadores, este problema pode ser minimizado se se começar o estudo das funções pela construção de gráficos de fenómenos qualitativos, a partir das intuições que os alunos têm sobre esses mesmos fenómenos.

Os alunos têm tendência a ver cada representação de função separadamente. Nem sempre reconhecem a relação entre as múltiplas representações. De uma maneira geral, conseguem raciocinar dentro de cada representação bem como interpretar e tirar conclusões a partir dessa representação. Contudo, raras vezes raciocinam entre as múltiplas representações e tiram poucas conclusões sobre uma representação a partir de uma outra. O sentido comum suporta a noção de que as múltiplas representações de funções podem ajudar a sua compreensão. Usadas reflectidamente, as ligações das múltiplas representações podem reduzir as ambiguidades presentes talvez numa simples representação. Ou seja, cada representação bem escolhida transporta parte do melhor significado. Juntas podem melhorar a fidelidade da mensagem completa.

Os alunos mostram preferência pela resolução analítica das questões. Esta preferência parece estar baseada na crença de que a solução analítica é uma prática matemática com mais legitimidade e mais aceitável nos testes. Os alunos têm uma grande história no uso de representações algébricas porque, no passado, as representações numéricas e gráficas eram fastidiosas e consumiam muito tempo.

O uso das tecnologias no estudo da Matemática, em geral, e na Análise, em particular, parece ter um efeito positivo na compreensão dos conceitos. Não é claro, contudo, se este efeito positivo é devido à presença de uma mudança no ambiente de sala de aula—trabalho em pequenos grupos, por exemplo — ou a uma mudança na ênfase dos conteúdos de Análise—mais trabalho com as representações gráficas e numéricas, por exemplo. O uso da tecnologia pode ajudar a vencer obstáculos cognitvos e pode ajudar os alunos a desenvolver conceitos imagens apropriados de Análise.

As ferramentas computacionais na aula de Matemática, concretamente no estudo das funções, alteram a ênfase da actividade de construção de gráficos para a de interpretação desses mesmos gráficos. Cálculos repetitivos e complexos realizam-se no computador. Os alunos ficam livres para se concentrarem nos conceitos e para se interrogarem sobre "o que o gráfico está a dizer". Deste modo, são encorajados a fazer conjecturas.

O uso de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática em geral, e no estudo da Análise, em particular, pode elevar o comprometimento dos alunos com os conteúdos programáticos. Os alunos podem envolver-se activamente em fazer matemática.

Com base na revisão de literatura feita, este estudo foi planeado no sentido de compreender os processos de aprendizagem do conceito de derivada em contextos computacionais. Os alunos exploraram, em grupo, os conceitos subjacentes ao estudo da derivada. O seu conceito foi apresentado como um processo limite das secantes aproximando-se da tangente. Foram explorados vários exemplos e contra-exemplos de funções diferenciáveis, com o apoio do programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus*.

A revisão de literatura feita refere-se quase exclusivamente a alunos de nacionalidade não portuguesa. Nesta investigação, procurou-se compreender o que se passa com alunos portugueses, tentando identificar estratégias semelhantes ou novas estratégias às apresentadas nas diferentes investigações. Algumas das questões das fichas de actividades coincidem, em parte, com questões usadas em estudos descritos neste capítulo. A literatura revista forneceu uma base para preparar todas as outras questões a explorar.

6. Definição de termos

Na revisão de literatura foram introduzidos determinados termos que são relevantes para a análise de dados deste estudo e dos quais se faz uma síntese nesta secção.

Compartimentação — De acordo com Selden e Selden (1992), a compartimentação do conhecimento ocorre quando uma pessoa, estando num certo contexto intelectual, ignora alguma coisa que existe na sua mente e que é extremamente relevante nesse contexto.

Vinner *et al.* (1989) concluíram que, por exemplo, quando se pede a definição de função, os alunos podem dar uma resposta completamente formal e abstracta (a definição de Dirichlet-Bourbaki), mas voltam ao comportamento determinado pela concepção da fórmula quando estão a trabalhar na identificação ou construção de tarefas funcionais. Os conceitos imagem e definição de função, como sublinhou Vinner, podem ser incompatíveis um com o outro e pode coexistir na cabeça dos alunos, um fenómeno que ele chamou de compartimentação do conhecimento.

Conceito imagem — Vinner e Hershkowitz (1980) usaram o termo conceito imagem para descrever a estrutura cognitiva que está associada ao conceito e que inclui todas as figuras mentais e as propriedades e processos associados a esse conceito.

De acordo com Vinner e Dreyfus (1989), na maior parte dos casos, os alunos decidem, tendo em conta o conceito imagem, isto é, com base no conjunto de todas as figuras mentais (desenhos, formas simbólicas, diagramas, gráficos, etc.) associadas na mente do aluno com o nome do conceito, junto com todas as propriedades que as caracterizam. O conceito imagem é o resultado das experiências dos alunos com exemplos e contra-exemplos desse conceito. Assim, o conjunto de objectos matemáticos considerados pelos alunos como exemplos de um conceito não é necessariamente o mesmo do conjunto de objectos matemáticos determinados pela definição.

Conceito definição — Trata-se da verbalização do conceito. Segundo Hershkowitz (1990) a definição verbal de um conceito inclui um mínimo de atributos relevantes suficientes para definir o conceito.

Concepção errónea — Para Pines (citado em Confrey, 1990), certas relações conceptuais que são adquiridas podem não ser apropriadas dentro de um certo contexto. A essas relações chamou de *misconceptions* que neste estudo traduzimos por concepções erróneas. Assim, para Pines, uma concepção errónea não existe independentemente mas depende de um certo quadro de referência conceptual. Quando o quadro de referência conceptual muda, aquilo que era imaginado ser uma concepção errónea pode deixar de o ser.

Concepção estrutural e concepção operacional — De acordo com Sfard (1991), as noções abstractas podem ser concebidas de dois modos diferentes: **estruturalmente** (como objectos) e **operacionalmente** (como processos). Sfard apresentou a distinção entre as duas abordagens do seguinte modo: ver uma entidade matemática como um objecto significa ser capaz de se referir a ela como se fosse uma coisa real — uma estrutura estática, existindo algures no espaço e no tempo. Em contraste, interpretar uma noção como um processo implica olhar para ela como um potencial mais do que como uma entidade, que se torna existência apenas a partir de uma sequência de acções. Assim, enquanto a concepção estrutural é estática e integrativa, a operacional é dinâmica e detalhada.

Conhecimento conceptual e conhecimento procedimental — Hiebert e Lefevre (citados em Kloosterman e Gainey, 1993), definem conhecimento conceptual como aquele que está ligado e assim facilmente relacionado com outro conhecimento. Pelo contrário, o conhecimento procedimental é baseado em símbolos e na memorização de regras, sem olhar para compreensões subjacentes a esses símbolos e a essas regras. O conhecimento conceptual é um conhecimento que é rico em relações. O conhecimento procedimental tem duas partes distintas: uma parte é constituída pela linguagem formal, ou sistema de representação simbólica; a outra parte consiste nos algoritmos, nas regras para completar as tarefas matemáticas.

Conhecimento formal e conhecimento informal — Ginsburg (citado em Confrey, 1990) afirma que uma das maiores dificuldades dos alunos é o hiato entre o conhecimento formal e o conhecimento informal. Para Ginsburg, o conhecimento formal refere-se ao que é ensinado numa instituição educacional organizada e estruturada, onde operam certos constrangimentos e condições que diferem da vida fora da instituição; o informal é aquilo que não é ensinado nessas instituições. O formal refere-se a um sistema de definições e provas inter-relacionadas, o informal refere-se a conjecturas mais intuitivas. O formal refere-se a métodos escritos, o informal refere-se a estratégias mentais; o formal refere-se à abstracção de um procedimento a partir do seu contexto, o informal refere-se a rotinas que são levadas a cabo mecanicamente; o formal refere-se ao conhecimento que se aceita como legítimo porque foi demonstrado por pessoas experientes, o informal refere-se ao conhecimento que a pessoa aprendeu através das suas acções pessoais.

Estratégia — Plano geral de actuação para resolver um problema.

Imagem mental — Segundo Silver (1987), imagens são representações (normalmente visuais) baseadas em impressões sensoriais de objectos ou acontecimentos actuais. As imagens são também geradas por interpretações verbais correspondentes aos objectos ou acontecimentos.

Wheatley, G. e Brown, D. (1994), referem que as actividades que encorajam a construção de imagens mentais desempenham um papel significativo no raciocínio matemático. Quando os alunos estão mais comprometidos com significados matemáticos do que com cálculos mecânicos, é bastante provável que eles estarão a usar alguma forma de imagem mental.

Processo — Mourão (1994) identifica como processo tudo aquilo que o aluno faz e pensa enquanto resolve um problema. Ponte (1994, p. 298) afirma que "os educadores matemáticos começaram crescentemente a sentir que, para ensinar a resolver problemas, a escola teria de conhecer as dificuldades que os alunos encontram e as estratégias utilizadas pelos mais bem sucedidos. É a partir deste ponto que passam a ser objecto de interesse os processos usados na resolução de problemas".

Reificação — Transformação, por operação mental, de conceitos abstractos em realidades concretas, em objectos. De acordo com Sfard (1992), a reificação é o estádio final da formação de uma concepção estrutural de uma dada noção matemática. A concepção estrutural desenvolve-se a partir de uma concepção operacional, seguida de uma condensação e finalmente da reificação do processo subjacente. Enquanto os dois primeiros estádios são graduais e cumulativos, a reificação é uma mudança brusca, a capacidade súbita de ver uma coisa familiar (um processo) como alguma coisa completamente nova (um objecto). Domingos (1995), utilizou o termo concretização com o mesmo significado de reificação.

Representação — Davis, Young, e McLoughlin (citados em Janvier, 1987b), afirmam que uma representação pode ser considerada como uma combinação de três componentes: símbolos escritos, objectos e imagens mentais.

O termo representação pode ser interpretado como uma personificação externa de conceptualizações internas dos alunos — embora esta dicotomia interna/externa seja artificial (Lesh et al., 1987a).

Representações internas e representações externas — Para Janvier *et al.* (1993), as representações externas são vistas como personificações de ideias ou conceitos, actuam como estímulos dos sentidos e incluem mapas, tabelas, gráficos, diagramas, modelos, gráficos em computador e sistemas de símbolos formais. As representações internas não podem ser observadas directamente, podem ser inferidas a partir da observação do trabalho dos alunos.

As representações externas podem ser mais ou menos icónicas no sentido em que elas podem mais ou menos sugerir nas suas combinações ou configurações a representação interna com a qual estão relacionadas. Algumas representações matemáticas parecem ser mais sugestivas e de mais fácil representação do que outras. São mais icónicas. Por exemplo, a combinação simbólica dy/dx evoca mais o processo subjacente à notação do que o faz a configuração y'.

Segundo Dufour-Janvier, Bednarz e Bélanger (1987), as representações internas dizem respeito às imagens mentais que são construídas pelo indivíduo, ao interpretar e descodificar uma realidade. Já no caso das representações externas, estaremos perante organizações simbólicas materializáveis que têm por objectivo traduzir uma determinada situação.

Tradução — "Processos psicológicos envolvidos em passar de um modo de representação para outro, por exemplo, passar de uma equação para um gráfico" (Janvier, 1987, p. 27).

Visualização — "Capacidade para representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e reflectir sobre informação visual" (Hershkowitz, 1989, p. 75). A visualização é essencial para a compreensão matemática, na aquisição de conceitos e na resolução de problemas (Vinner, 1989). Segundo Tall (1994), é possível usar o poder complementar da visualização para dar uma percepção global de conceitos matemáticos.

Capítulo 3

Plano metodológico

Este capítulo, em que se descreve e justifica o plano metodológico, inicia-se com uma referência às intenções da investigação. Referem-se algumas das características de uma metodologia investigativa de *experiência de ensino (teaching experiment)* em particular, fundamentando as razões que levaram a esta opção metodológica e algumas das características de uma abordagem qualitativa, em geral. Em seguida, descreve-se a operacionalização da experiência de ensino neste estudo. Indicam-se as principais técnicas de recolha de dados. Os procedimentos da análise de dados constituem a secção seguinte. Por último, apresentam-se algumas das limitações do estudo.

3.1. Intenções da Investigação

A investigação que nos propusemos realizar pretendia compreender os processos de aprendizagem do conceito de derivada, em contextos computacionais.

Foram levantadas as seguintes questões que serviram de referencial à observação feita:

1. Como é que os alunos determinam e utilizam o conceito de declive de uma recta?
2. Como determinam e compreendem o conceito de derivada de uma função num ponto?
3. Como relacionam o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada e vice-versa?

4. De que modo estas aprendizagens são influenciadas pelo contexto computacional escolhido?

Neste estudo, pretendia-se desenvolver uma estratégia de ensino que implicasse intervenção sistemática e estímulo da aprendizagem dos alunos e determinar a eficácia dessa estratégia. É o que, ainda que menos sistematicamente, alguns professores fazem quando experimentam qualquer coisa nova na sua sala de aula e avaliam as consequências dessa acção sobre a aprendizagem dos alunos.

Em termos globais, a investigação conduzida tem uma natureza qualitativa de *experiência de ensino*. Este carácter advém não apenas do modo como a informação foi recolhida, analisada e descrita mas sobretudo das questões que foram colocadas e dos princípios ou paradigmas em que se baseiam os métodos para investigar essas questões. Pretendia-se não só observar os processos complexos envolvidos na aprendizagem mas influenciar esses mesmos processos desenvolvidos pelos alunos num determinado cenário educacional. Não foi feita qualquer comparação explícita com qualquer outro procedimento de ensino.

3.2. Opções metodológicas

À medida que avançam os estudos em educação, mais evidente se torna o seu carácter dinâmico. Um dos desafios actualmente lançados à pesquisa educacional é exactamente o de tentar captar essa realidade dinâmica e complexa. E como afirma Kantowski (1987) se fosse apenas escolhido um termo para caracterizar as *experiências de ensino* esse termo poderia ser "dinâmica", porque é movimento que interessa aos investigadores, movimento da ignorância para o conhecimento, de um nível de conhecimento para outro, de um problema para uma solução.

Shulman (1986, p. 18), diz que: "a complexidade do fenómeno educativo e o grande número de variáveis que nele interagem torna quase impossível o seu isolamento e a identificação, sem ambiguidade, das causas que produzem determinado efeito. Este facto tem revelado a importância, para a investigação educacional, de uma abordagem do tipo qualitativo".

O propósito de compreender os processos desenvolvidos pelos alunos no estudo das derivadas e determinar como é que a utilização de ferramentas computacionais se reflecte nas estratégias e procedimentos dos alunos, levou às decisões metodológicas. Implementou-se um cenário pedagógico em que se manifestassem as formas de pensamento, dificuldades e decisões de alguns dos alunos de duas turmas do 12° ano, no estudo das derivadas de funções, em horário extra-lectivo. Os alunos recorreram a um programa de gráficos *A Graphic Approach to the Calculus* para realizar as actividades propostas e trabalharam em grupos de dois elementos, o que favoreceu a explicitação dos seus raciocínios.

O acompanhamento mais sistemático do trabalho desenvolvido por três grupos de alunos foi uma forma considerada mais adequada para compreender os processos utilizados pelos alunos. Esta opção, embora tenha originado uma diminuição da perspectiva geral da turma, proporcionou uma descrição fina dos esquemas conceptuais e dos processos desenvolvidos por esses alunos. Esta é uma das características do método qualitativo que, de acordo com Merriam (1988), tem como preocupação dominante os processos e não os produtos.

Num estudo que visava a compreensão dos processos desenvolvidos pelos alunos em contextos computacionais, os alunos acompanhados de uma forma mais sistemática, em cada *episódio de ensino* foram questionados com frequência pela investigadora no sentido de explicitarem as suas ideias e formas de actuação. A investigadora preocupou-se com a gravação audio e vídeo de todos estes episódios no sentido de obter todos os registos das interacções aluno/aluno, alunos/professora e alunos/investigadora.

3.2.1. Experiências de ensino como metodologia de investigação

A decisão sobre os métodos a utilizar é uma consequência directa das questões seleccionadas a partir do modelo que a pessoa construiu para explicar o fenómeno de interesse e a partir da conjectura levantada. Se a conjectura envolve predizer o que acontecerá em condições que não existem agora — isto é, se implica a recolha de evidência sobre os efeitos de um produto ou programa novo e diferente — usa-se uma abordagem experimental. Nestes estudos a criação de uma nova situação constitui uma parte chave do esforço. Através do estudo de uma nova situação e dos seus efeitos, o investigador tenta construir um argumento causal. Nesta categoria, existem muitas distinções possíveis entre a variedade de métodos usados pelos investigadores. Uma das abordagens possíveis, em educação, são as chamadas experiências de ensino.

Este método de investigação baseia-se numa prática comum de bons professores. Periodicamente, a maior parte dos professores experimentam qualquer coisa nova na sua sala de aula e avaliam as consequências dessa acção sobre a aprendizagem dos alunos. No entanto, a abordagem usada pelos investigadores é muito mais sistemática no sentido em que as hipóteses são primeiro formuladas no que diz respeito ao processo de aprendizagem, desenvolve-se uma estratégia de ensino que implica intervenção sistemática e estímulo da aprendizagem dos alunos e, ao mesmo tempo, determina-se a eficácia da estratégia de ensino e as razões para essa eficácia. Assim, uma experiência de ensino, pode ser considerada uma metodologia de investigação desenvolvida em três fases: (1) são colocadas hipóteses sobre o processo de aprendizagem; (2) desenvolve-se uma estratégia de ensino; (3) determina-se a eficácia do ensino e da aprendizagem.

A experiência de ensino tem como objectivo "'apanhar' os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos" (Kantowski, 1978, p. 45).

O presente estudo pretendia descrever e interpretar processos desenvolvidos pelos alunos através de uma intervenção planificada com recurso a ambientes computacionais, pelo que nos pareceu adequada uma abordagem metodológica de experiência de ensino.

3.2.1.1 Origens das experiências de ensino

Psicólogos e pedagogos soviéticos do período pós-revolução socialista, preocupados com uma ligação entre a investigação educacional teórica e a realidade da sala de aula, estão na origem das experiências de ensino. Defendiam que a construção do conhecimento matemático dos alunos era fortemente influenciada pela experiência adquirida através da interacção com o professor e que, excepto para casos envolvendo problemas orgânicos ou atrasos, todos os alunos traziam, à partida, o mesmo potencial para o desempenho académico (Kantowski, 1987).

O psicólogo Vygotsky, nos anos vinte, ao afirmar que os processos mentais não são inatos mas sim formados e que o seu desenvolvimento é totalmente dependente do modo como são ensinados, influenciou profundamente este tipo de investigação didáctica. Vygotsky (1988) caracterizou o desenvolvimento intelectual como evolutivo ou formado pela adaptação a ambientes externos. Para este psicólogo, todos os processos mentais são o resultado da interiorização, consequência de alguma actividade externa. Vygotsky concluiu, por exemplo, que os processos de análise, síntese, comparação e generalização exibem níveis definidos e que, nesses níveis, se notam os efeitos positivos da utilização de várias práticas pedagógicas. Vygotsky fez ainda a distinção entre conceitos simples e conceitos científicos, uma diferença não nos conteúdos dos conceitos mas no modo como esses conceitos são conhecidos a fundo. Os primeiros são aprendidos espontaneamente e de uma forma não eficiente do objecto para a definição, através de uma experiência diária, enquanto que os complexos são aprendidos da definição para o objecto através de um ensino cuidadosamente planeado (Kantowski, 1987).

Nesta perspectiva, os investigadores soviéticos não se preocuparam apenas em observar os processos complexos envolvidos na aprendizagem, mas influenciaram a aprendizagem desses mesmos processos. "Os novos métodos de investigação incluíam observações longitudinais e avaliação; deveriam permitir que o investigador estudasse mudanças na actividade mental bem como os efeitos do ensino planeado em relação às actividades" (Kantowski, 1987, p. 44).

3.2.1.2. Razões para um investigador agir como professor

A actividade de ensinar envolve uma dialéctica entre a modelação e a prática. As acções dos professores são formuladas dentro de um quadro teórico dos seus modelos correntes.

Cobb e Steffe (1983, p. 85) afirmam que "a falta de observação em primeira mão dos processos construtivistas dos alunos nega ao investigador a base experiencial tão importante na formulação de uma explicação desses processos". De acordo com os autores, os investigadores que não se ocupam dum ensino intensivo e extensivo dos alunos correm o risco de que os seus modelos sejam distorcidos para reflectirem o seu próprio conhecimento matemático.

Nesta perspectiva, Cobb e Steffe (1983, pp. 83-87) defendem que a actividade de explorar a construção do conhecimento matemático dos alunos deve envolver ensino. Estes autores apresentam três razões para um investigador actuar como professor: (a) *A análise teórica feita pelos investigadores desempenha um papel importante na compreensão do comportamento matemático do aluno, mas é insuficiente.* O conhecimento adquirido através de análises teóricas pode, na melhor das hipóteses, intersectar parte do conhecimento que se obtém ao experienciar as dinâmicas de um aluno a fazer matemática. Estas experiências dão ao investigador a oportunidade de testar e rever a compreensão matemática construída pelo aluno; (b) *As experiências que os alunos obtêm através das interacções com os adultos influenciam muito a sua construção do conhecimento matemático.* A técnica da entrevista clínica é muito apropriada ao objectivo psicológico de investigar uma sequência de passos que os alunos fazem quando constroem um conceito matemático. Ao usar a entrevista clínica, um investigador pode especificar padrões estruturais que os alunos conseguem abstrair da sua experiência através da interacção com o meio. Contudo, o investigador que conduz uma entrevista clínica não tem como intenção focar os momentos críticos em que a reestruturação cognitiva tem lugar; (c) *Importância atribuída ao contexto em que os alunos constroem o conhecimento matemático.* Os alunos podem seguir uma sequência diferente de passos e construir conceitos diferentes em contextos de ensino particulares.

3.2.1.3. Principais características das experiências de ensino

Cobb e Steffe (1983) salientam três características gerais das experiências de ensino: (a) Longos períodos de interacção entre o experimentador e o grupo de alunos; (b) São estudados os processos de uma passagem dinâmica de um estádio de conhecimento para outro. Interessa o que os alunos fazem, mas interessa mais como o fazem; (c) Mais do que quantitativos, os dados são geralmente qualitativos. Os dados qualitativos emanam de duas fontes possíveis. A primeira fonte são os episódios de ensino com os alunos. Os dados são os diálogos entre o professor e os seus alunos bem como descrições dos contextos de ensino e das respostas dos alunos nesses contextos. A segunda fonte são entrevistas clínicas conduzidas em determinados momentos do ensino.

Kantowski (1987), na mesma linha de Cobb e Steffe (1983) afirma que *os dados são, a maior parte das vezes, qualitativos*, obtidos a partir do registo, num contexto clínico, de protocolos verbais para análise futura. Uma outra característica da experiência de ensino apontada por Kantowski é a sua *natureza longitudinal* (o ensino é aplicado e os dados são obtidos ao longo de um período de tempo que dura normalmente de seis semanas a dois anos). A planificação do ensino pode ser reestruturada com base nas observações feitas durante sessões anteriores. Existe cooperação entre professores e investigadores. Não é feita qualquer comparação explícita com outro procedimento de ensino.

Lesh e Kelly (1994) caracterizam as experiências de ensino como o desenvolvimento de estudos longitudinais em ambientes conceptualmente ricos. Elas focam experiências da vida real na sala de aula, tais como as que aparecem quando os professores: (a) usam materiais concretos para entrevistar os alunos e identificar pontos fortes e fraquezas conceptuais específicas; (b) observam grupos de alunos quando trabalham em actividades complexas baseadas em projectos; (c) avaliam esses pontos fortes e fracos dos resultados que os alunos produzem durante o desenvolvimento de actividades autênticas e que sejam realisticamente complexas; (d) conduzem discussões e planeiam outras actividades de ensino focadas em compreensões mais profundas de ideias e processos matemáticos elementares.

Durante todo o tempo das experiências de ensino, são integradas actividades para ensino e avaliação: (a) as actividades estão concebidas no sentido de proporcionarem aos indivíduos envolvidos experiências poderosas de aprendizagem; (b) muitas das actividades utilizadas no ensino permitem que o aluno produza automaticamente documentação para verificar o tipo de aprendizagem que ocorreu; (c) as actividades de avaliação têm por objectivo dar informação que facilite a tomada de decisões pedagógicas cujos principais objectivos são os de encorajarem o desenvolvimento dos alunos; (d) as actividades de avaliação para alunos formam a base das actividades de ensino para os professores. Exemplos dessas actividades incluem: adaptar actividades existentes baseadas em projectos para se focarem em experiências da vida real de grupos específicos de alunos; fazer observações perspicazes durante as actividades da sala de aula; ou conduzir entrevistas para diagnosticar a habilidade e a fraqueza dos alunos (Lesh e Kelly, 1994).

Menchinskaya (citado em Cobb e Steffe, 1983, p. 87) identificou dois tipos de experiências de ensino relatadas na literatura soviética: *macroesquemas* — estudam-se mudanças na actividade e desenvolvimento escolar de um aluno quando faz a transição de um nível etário para outro, de um nível de ensino para outro; *microesquemas* — é observada num aluno a transição da ignorância para o conhecimento, de um modo de trabalho escolar menos perfeito para outro mais perfeito.

Os *macroesquemas* têm, de uma maneira geral, uma orientação curricular e desenvolvem-se em toda uma turma. Os *microesquemas* têm uma orientação psicológica e ocupam-se de alunos individuais.

3.2.2. Metodologia qualitativa, porquê?

O que distingue um método de investigação de outro não é apenas o modo como a informação é recolhida, analisada e descrita, mas também os vários tipos de questões colocadas e os princípios ou paradigmas em que se baseiam os métodos para investigar essas questões.

Segundo Poisson (1990, p. 16) "Metodologia é a lógica dos princípios gerais, que guiam a condução duma investigação sistemática na procura do conhecimento".

Este estudo tem como objectivo principal identificar, compreender e descrever em profundidade a riqueza dos processos de pensamento desenvolvidos por um número limitado de alunos, mais do que obter generalizações. Não se pretende verificar apenas se determinada capacidade se encontra desenvolvida, mas compreender o modo como se desenvolve e quais os factores que intervêem quer positiva quer negativamente nesse desenvolvimento. A ênfase é colocada no estudo dos processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos. Com esta valorização dada aos processos (neste estudo identificamos processos com tudo aquilo que o aluno faz e pensa enquanto resolve um problema) em detrimento dos produtos obtidos, optou-se por levar a cabo uma investigação de natureza qualitativa.

3.2.3. Breve caracterização da investigação qualitativa

O foco da investigação qualitativa é a compreensão mais profunda dos problemas, é investigar o que está "por detrás" de certos comportamentos, atitudes ou convicções.

Cronbach (citado em Carreira e Matos, 1984, p. 27), no sentido de encontrar alternativas à linguagem de alguma forma herdada do paradigma positivista, propõe que: "se substitua a noção de generalização em investigação qualitativa pelo constructo hipótese de trabalho, argumentando que o investigador, ao recolher dados, numa dada situação particular, avalia-os através da observação do fenómeno num dado contexto. Ao descrever o fenómeno [o investigador] dá atenção aos elementos mais controláveis mas preocupa-se fundamentalmente com a complexidade do fenómeno".

Ponte (1994, p. 9) afirma que "uma das perspectivas teóricas fundamentais que inspiram a investigação qualitativa é a perspectiva interpretativa, baseada na fenomenologia. Nesta perspectiva, uma ideia central é a de que a actividade humana é fundamentalmente uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significado".

Este tipo de análise exige tempo, imaginação, perspicácia, capacidade de análise, paciência e habilidade para contar.

Bogdan e Biklen (1994, pp. 47-51) identificam e analisam cinco características das investigações qualitativas que se resumem a seguir:

Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural e o investigador é o seu instrumento chave. O investigador compreende as influências do contexto nos fenómenos que está a estudar pelo facto de se manter em contacto estreito com a situação. Para o investigador qualitativo a separação do acto, palavra ou gesto do seu contexto significa perder uma parte do significado.

A investigação qualitativa é descritiva. Fazem-se descrições de pessoas, de situações e de acontecimentos. O investigador qualitativo tenta analisar e descrever os dados com todo o pormenor, procurando não distorcer a forma como foram recolhidos.

A investigação qualitativa interessa-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos. Tem mais interesse perceber-se o modo como um aluno resolveu um determinado problema do que o resultado obtido nessa resolução.

A investigação qualitativa tem tendência a analisar os seus dados de forma indutiva. O investigador não tem como preocupação testar hipóteses, mas partir da análise dos dados num processo de baixo para cima a partir de peças discrepantes mas que estão relacionadas umas com as outras. A descrição passa a tomar forma à medida que as partes vão sendo recolhidas e examinadas.

O significado é uma preocupação importante na abordagem qualitativa. A investigação qualitativa esclarece a dinâmica interna de situações que, por vezes, são invisíveis para o exterior.

3.3. Operacionalização da experiência de ensino neste estudo

Este estudo pretendia compreender os processos de aprendizagem dos alunos no estudo das derivadas em contexto computacional. Assim, interessava investigar as sequências de passos realizadas pelos alunos na construção de um determinado conceito matemático, ou seja, revestia-se de crucial importância o modo como os alunos construíam o seu próprio conhecimento. Mas o objectivo desta investigação não se reduzia à observação dos processos complexos envolvidos na aprendizagem, pretendia influenciar a aprendizagem desses mesmos processos.

Assim, implementar uma experiência de ensino pareceu uma opção metodológica adequada aos objectivos do estudo, no qual, alunos de duas turmas do 12° ano, em horário extra-lectivo e recorrendo a ferramentas computacionais, desenvolveram actividades de exploração dos conceitos subjacentes ao estudo da Análise.

Ao longo de toda a experiência de ensino existiu uma grande cooperação entre a professora das turmas e a investigadora. As actividades propostas aos alunos foram concebidas por ambas e tinham como objectivo primordial proporcionarem aos aluno experiências poderosas de aprendizagem. A planificação inicial da intervenção foi sendo reestruturada sempre que se considerou necessário com base em observações feitas no decorrer da experiência. Não foi feita qualquer comparação explícita com outro procedimento de ensino.

Muitas experiências de ensino têm recorrido num ambiente de entrevistas clínicas individuais ou em grupo. Neste estudo optou-se por intervir num ambiente que, embora controlado (pequenos grupos) mantinha muitas ligações com o ambiente de sala de aula usual.

A investigadora observou, dialogou e apoiou o trabalho realizado pelos diferentes grupos de trabalho, embora tenha dado uma atenção especial ao trabalho desenvolvido pelos alunos dos três grupos seleccionados e que constituiu a fonte principal dos dados analisados. Sempre que necessário a investigadora conduziu entrevistas não estruturadas a esses alunos com o objectivo de compreender melhor a utilização de certas estratégias de resolução.

Em seguida, descrevem-se os participantes e o cenário deste estudo, fundamentando as razões que levaram à escolha feita.

3.3.1. Participantes e cenário

Os participantes neste estudo foram alguns dos alunos de duas turmas de 12° ano (12° 3 e 12° 5, que neste estudo serão designadas, respectivamente, por T3 e T5), da Escola Secundária de S. João do Estoril (concelho de Cascais), no ano lectivo de 1994/95.

Inicialmente pensámos levar a cabo esta investigação com uma turma de 11° ano. No entanto, devido ao pouco tempo para efectuar este estudo e ao facto de a Unidade Didáctica — Derivadas de Funções — ser o último conteúdo programático a ser leccionado no 11° ano de escolaridade, optámos por turmas de 12° ano. Além disso, quando esta matéria é leccionada no 11° ano é, normalmente, feita numa "corrida contra o tempo", o que leva mais à utilização de complexas regras de cálculo do que à compreensão dos conceitos envolvidos.

A escolha desta escola para a realização desta investigação prende-se com o facto de a investigadora ter um bom relacionamento com uma professora que aí lecciona, a professora Manuela Taborda, que se mostrou, desde logo, interessada e empenhada neste estudo que, aliás como ela própria referiu, "ia ao encontro da sua programada linha de actuação". Esta professora desenvolvia actividades deste tipo desde o início do ano lectivo, na revisão ou leccionação de temas do 11° ano com continuidade no 12° ano, duas vezes por semana, para os alunos que nelas quisessem participar. A investigadora começou a participar nestas aulas a partir de Janeiro de 1995, e concluiu que o grupo de alunos reunia as condições para a realização do trabalho. Numa destas aulas a investigadora deu aos alunos algumas indicações do trabalho que pretendia realizar e sublinhou o papel importante da sua colaboração. A presença da investigadora nestas primeiras aulas foi fundamental para a recolha de dados que, mais tarde, veio a realizar. Os alunos sentiam que, em vez de uma, podiam contar com duas professoras que os apoiavam nas suas dificuldades e com quem podiam trocar ideias sobre a forma como desenvolviam as actividades que lhes eram propostas.

A investigadora e a professora têm trabalhado, em conjunto, no desenvolvimento de materiais de apoio ao ensino-aprendizagem de algumas unidades didácticas, com recurso a ferramentas computacionais e ainda, na dinamização de acções de formação para professores de Matemática, no âmbito do Programa FOCO, subordinadas ao tema "O computador na aula de Matemática" e "A Geometria nos Novos Currículos do 2° e 3° Ciclo do Ensino Básico e Secundário".

A experiência de ensino teve início no final do 2° período e prolongou-se por todo o 3° período do ano lectivo de 1994/95. Abrangeu um total de trinta e seis aulas, vinte na sala de computadores e dezasseis na sala de aula habitual.

As actividades foram desenvolvidas na sala de computadores, duas horas por semana — uma hora para cada turma (em horário extra-lectivo). Mais tarde, os alunos das duas turmas participaram na mesma hora semanal de aula com computadores, uma vez que a outra hora foi imprescindível para a professora terminar os conteúdos programáticos do 12° ano.

Participavam nestas aulas extra-lectivas os alunos que o quisessem fazer. Assistiam, com assiduidade a estas aulas dezassete alunos, oito da turma T3 e nove da turma T5.

Foram seleccionados, de entre esses alunos, três grupos de alunos, compostos por dois elementos cada (dois grupos da turma T3, que serão designados por G3A e G3B, e um grupo da turma T5 que será designado por G5) para serem acompanhados de uma forma mais sistemática ao longo do desenvolvimento de todas as actividades propostas e que, na sua maioria, implicavam a utilização de ferramentas computacionais. Os grupos foram formados de acordo com as preferências dos alunos. Não se mantiveram totalmente estáveis ao longo do estudo. Quando um dos alunos de um dos grupos faltava, havia sempre um outro aluno que se lhe associava. Assim, nalguns diálogos aparece, uma vez ou outra, uma díade diferente da habitual. Pensou-se que, o confronto de ideias e discussão de estratégias que o trabalho em grupo fomenta, seria uma forma adequada de ter uma percepção dos processos utilizados pelos alunos, da evolução dos seus raciocínios e das interacções desenvolvidas. Todos estes alunos foram excepcionais no modo como colaboraram com esta investigação mostrando-se sempre disponíveis e bem dispostos para responder às questões que a investigadora lhes colocava, ainda que, sacrificando, muitas vezes, a tão desejada hora de almoço.

O critério adoptado para a escolha dos grupos teve a ver com a assiduidade dos alunos a estas aulas extra-lectivas e com o facto de a professora ter considerado alguns deles como alunos que, embora não tivessem um aproveitamento muito bom, gostavam de pensar nas questões que lhes eram colocadas.

Considerou-se que dois alunos seria o número ideal para o trabalho com recurso a ferramentas computacionais. Além disso a sala estava equipada com 8 computadores o que tornava possível esta distribuição.

O facto de apenas três dos grupos terem um acompanhamento mais sistemático impediu, de algum modo, uma visão global do funcionamento da turma na realização das actividades. De qualquer modo, esta opção teve a vantagem de permitir acompanhar, compreender e interpretar, de perto, os processos desenvolvidos por estes alunos como era, aliás, o objectivo desta investigação.

3.3.1.1. Um retrato da Turma T3

Os alunos da turma T3 frequentavam as disciplinas de Matemática, Física e Biologia. Na sua maioria, no ano lectivo anterior não tinham frequentado esta escola. No 10° e 11° anos estavam integrados nas áreas de Informática, de Desporto e de Saúde. Mesmo os alunos que tinham frequentado no ano lectivo anterior a mesma escola, não se conheciam. A disciplina de Matemática contava com vinte e três alunos inscritos, sendo quinze do sexo masculino e oito do sexo feminino. A idade dos alunos variava entre os 17 e os 21 anos, sendo a média das idades de 18,2.

Em relação ao aproveitamento dos alunos na disciplina de Matemática, no que diz respeito às notas obtidas nos dois períodos anteriores, podemos afirmar que era uma turma fraca (63% dos alunos tiveram negativa no 1° e 2° períodos).

Na opinião da professora os alunos desta turma eram atentos, simpáticos mas pouco participativos. Comentava a professora: "gostava que tivesses assistido a uma aula desta turma no início do ano. Parecia uma aula de mudos... eram muito 'dorminhocos'. Pareciam que estavam noutra época. Qualquer noção era 'chinês' para eles. Se pedias algum conceito, eles 'despejavam-te' uma frase com uma fórmula a que tiravam bocados e, não se entendia o que diziam... Agora têm vindo a melhorar. São alunos fracos. Penso que, alguns deles, muitas vezes não colocavam questões porque não sabiam como fazê-lo. Claro que muitos destes alunos acabaram por desistir. Fazia-me impressão. Não sei como é que eles chegaram ao 12° ano...".

Notava-se, de qualquer modo, uma boa relação da professora com os alunos.

Nas últimas aulas do ano lectivo os alunos manifestavam um certo cansaço e algum nervosismo devido ao facto de se aproximarem as datas para a realização das Provas de Aferição e Específica.

3.3.1.2. Um retrato da Turma T5

Os alunos da Turma T5 frequentavam as disciplinas de Matemática, Física e Geometria Descritiva. Na sua maioria, no ano lectivo anterior não tinham frequentado esta escola. No 10° e 11° anos estavam integrados na área de Art e Design. Poucos se conheciam. No início do ano, a disciplina de Matemática contava com vinte e nove alunos inscritos, sendo vinte e oito do sexo masculino e um do sexo feminino. A idade dos alunos variava entre os 16 e os 21 anos, sendo a média das idades de 17,5.

Em relação ao aproveitamento dos alunos na disciplina de Matemática, no que diz respeito às notas obtidas nos períodos anteriores, podemos afirmar que era uma turma de uma maneira geral fraca (52% e 53% dos alunos tiveram negativa no 1° e 2° períodos, respectivamente) embora tivesse também alguns alunos com um aproveitamento muito bom.

Era uma turma bastante heterogénea. Esta heterogeneidade trazia alguns problemas à professora. Dizia-me, com um certo ar de angústia, "é uma turma muito heterogénea. Os alunos não gostam nada de trabalhar em grupo e ficam incomodados quando vêem que estou a dar atenção aos mais fracos. Mas, como eu acho que todos eles são meus alunos... não gostam que os alunos fracos vão ao quadro... acham que demoram muito tempo para resolver um exercício... Além disso, penso que, a maior parte deles, gosta de 'receitas' e como eu detesto dar 'receitas' ... Havia um grupinho que gostava de saber os porquês, mas era uma minoria".

O clima na sala de aula era de grande abertura. Os alunos interrompiam várias vezes não só para tirarem alguma dúvida, mas também para explicarem os seus próprios raciocínios. Alguns mostravam-se muito interessados e preocupados com aquilo que não tinham percebido. Passavam os intervalos junto da professora a tentar esclarecer dúvidas que tinham surgido durante a aula. No princípio do ano o ambiente era um pouco diferente, de acordo com a opinião da professora: "Não posso dizer que no princípio do ano fosse assim. Eles não me conheciam e então tinham um certo receio de 'dizerem disparates'. Hoje sinto que eles estão na aula completamente à vontade e, assim, perderam o medo de 'dizer disparates'. Os alunos desta turma, de qualquer modo, talvez pela própria maneira de ser, começaram mais cedo a colocar questões, a concordar e a discordar. Alguns deles estudam em conjunto e, assim, não se inibem tanto de dizer coisas menos certas uns diante dos outros. Agora, noto que alguns deles estão a ficar um pouco difíceis. Querem obter boas notas sem trabalharem. O facto de se estar a aproximar a data da Prova Específica está a deixá-los tensos mas nem por isso estão a estudar mais". Acrescentou ainda: "alguns alunos desta turma não gostam de trabalhar em grupo, talvez devido ao facto de terem vindo de várias escolas. Não conseguiram criar esse método de trabalho. Em vez disso, foram arranjar explicadores. Não sei... fazem certamente muitos exercícios... mas não pensam no que estão a fazer... não trabalham o exercício de trás para a frente... arranjam técnicas... Alguns deles são alunos muito individualistas e nota-se, por vezes, uma certa competição entre eles".

3.3.1.3. Caracterização dos grupos

A caracterização dos grupos que, em seguida, vamos fazer, tem por base as observações da investigadora e as informações que a professora das turmas ia dando nas conversas que tinha com a investigadora, no final de cada aula.

3.3.1.4. O grupo G3A

O grupo G3A, da turma T3, era constituído pela Cristiana e pelo Paulo.

Estes dois alunos embora apresentando características substancialmente diferentes no desenvolvimento das actividades com recurso a ferramentas computacionais trabalhavam bem em grupo. A Cristiana assumia uma certa liderança. No entanto, o Paulo utilizava com maior frequência o teclado do computador. A Cristiana parecia mais preocupada em conseguir uma explicação analítica para justificar as questões. Podemos afirmar que a Cristiana gostava de 'fazer contas', o Paulo gostava mais de 'ler' gráficos. O Paulo tinha uma participação moderada no grupo, intervindo apenas quando, ele por via geométrica e a Cristiana por via analítica, chegavam a soluções diferentes. Ambos os alunos tentavam justificar o melhor possível aquilo que lhes era pedido. Não desperdiçavam tempo mas também não mostravam pressa na resolução das actividades. Olhavam demoradamente para o computador, apontavam, discutiam e só depois escreviam na ficha de trabalho. Queriam perceber bem o que faziam e, constantemente, embora não lhes fosse pedido, desenhavam os gráficos exibidos no ecrã do computador, nas suas próprias fichas de trabalho.

Cristiana — aluna com bons resultados escolares nas três disciplinas, muito trabalhadora quer em casa quer na sala de aula. Era muito persistente na realização das tarefas que lhe eram propostas. As situações novas causavam-lhe algum receio e, sentia-se pouco confiante nestas aulas que privilegiavam uma abordagem geométrica de resolução das questões. De início solicitava constantemente o apoio da professora ou da investigadora, algumas das vezes apenas para confirmar coisas que "não tenho a certeza que estejam bem". Deixava transparecer uma certa desconfiança em relação à máquina. Precisava de uma confirmação analítica. Dizia ela: "Eu estou mais habituada a fazer o cálculo e, por vezes, faço-o mais depressa do que se estiver a usar o computador... Eu não gosto muito de trabalhar com o computador". Manifestava uma certa preferência pela resolução analítica das questões.

Inv: [Com o gráfico da função exibido no ecrã do computador] Cristiana, quanto é que é f(0)?

Crist: [Sem olhar para o computador] É 1. Tive que ir substituir à função [2 × 0 + 1]

Inv: Calculem a taxa de variação média no outro intervalo.

Crist: Não substituo na função? [Faz uma cara de desconfiança... A resolução gráfica não lhe parece oferecer muita confiança].

Inv: Pode fazer como preferir.

Crist: [O Paulo está a tentar resolver a questão graficamente] Não, não. Eu gosto mais de fazer assim: f(3)-f(1) a dividir por (-3)-(-1). Dá 2. [Virando-se para o Paulo] Deu o mesmo.

Mais tarde, acabou por perceber algumas das vantagens que estas ferramentas lhe podiam proporcionar e afirmou: "eu, na realidade, não tinha grande empatia com o computador. Agora vejo que ele me ajuda a visualizar situações que nunca tinha percebido antes. Sinto que, muitas vezes, faço as coisas mecanicamente, sem perceber muito bem a parte gráfica ou o significado gráfico". A Cristiana podia ser considerada como a aluna 'analítica' do grupo, que gostava muito de fazer contas e mais contas.

Dizia-me a professora: "A Cristiana tem feito uma grande evolução desde o início do ano. Deve muito ao facto de ter estado a trabalhar em grupo, com o computador. Quando ela tinha necessidade de explicar aos outros, tinha que arranjar palavras para ver se os outros entendiam e, muitas vezes, a meio, dava-se conta de que ela também não estava a perceber bem 'afinal eu também não estou a perceber...'. Ou seja, ele própria, por vezes, não tinha visto bem as coisas, fazia-as como rotina. Dá-me ideia que, estas aulas com computadores lhe fizeram muito bem porque aprendeu a fazer coisas sem rotina. No início ela tinha muita dificuldade em pensar e 'ver' o que estava a fazer".

As notas obtidas por esta aluna nos três períodos escolares foram: 13, 15 e 17.

Paulo — aluno bastante interessado nas aulas e com resultados escolares de nível médio. Era um aluno calmo e mostrava ter confiança naquilo que fazia. Intervinha apenas quando directamente questionado ou quando não concordava com afirmações que a Cristiana fazia. Mesmo nessas situações, não defendia com grande entusiasmo a sua ideia. Geralmente resolvia as actividades de uma maneira original, com muita intuição e através da observação gráfica. Manifestava algumas dificuldades quando precisava de utilizar uma fórmula que, muitas vezes, não sabia. Dizia a professora: "O Paulo é o único aluno desta turma que resolve as inequações graficamente". Era o aluno 'geómetra' do grupo.

As notas obtidas por este aluno nos três períodos escolares foram: 9, 11 e 14.

3.3.1.5. O grupo G3B

O grupo G3B, da turma T3, era constituído pelo Luís Filipe e pelo Zé.

Era o Luís Filipe que utilizava com maior frequência o teclado do computador. Tinha muita facilidade em trabalhar com o programa que já tinha utilizado no ano lectivo anterior aquando do estudo das funções quadráticas e das funções trigonométricas. Consequentemente, era o Luís Filipe que assumia uma certa liderança no grupo. O Zé tinha uma participação mais moderada e, no início, mostrava-se um pouco confuso com as actividades a desenvolver. Não conseguia acompanhar a rapidez com que o Luís Filipe tirava conclusões a partir da observação dos gráficos exibidos no ecrã do computador. No entanto, estes dois alunos realizavam as actividades propostas com um ar divertido e muito descontraídos.

Luís Filipe — Aluno muito 'perspicaz', com grande facilidade em lidar com novas situações, muito interessado dentro da aula de Matemática mas bastante 'preguiçoso' no trabalho a desenvolver fora da sala de aula. O próprio Luís Filipe concordava que poderia ser um bom aluno na disciplina de Matemática se trabalhasse um pouco mais. Gostava muito de trabalhar com computadores. Fez o 10º e 11º anos da área de Informática. A utilização do computador no desenvolvimento de actividades matemáticas foi, para este aluno, um estímulo importante para melhorar o seu aproveitamento nesta disciplina. O Luís Filipe podia ser considerado como o aluno 'informático' do grupo.

As notas obtidas por este aluno nos três períodos escolares foram: 11, 10 e 12.

Zé — Aluno muito bem disposto e interessado. Nas aulas trabalhava com entusiasmo. Era um aluno de nível médio. No início da intervenção manifestava algumas dificuldades nas actividades a desenvolver, por falta de clarificação de conceitos anteriores e que eram pré-requisitos dos conceitos a construir. No entanto, era um aluno persistente. Quando não percebia alguma questão solicitava a ajuda do Luís Filipe que, muitas vezes, também não conseguia dar-lhe uma resposta. A resolução do Luís Filipe tinha sido tão rápida e intuitiva que, esta paragem e reflexão, o ajudava também a ele a uma interiorização mais profunda dos conceitos envolvidos. Esta interacção pareceu-me muito benéfica para ambos os alunos. O Zé gostava de trabalhar com computadores. Também para este aluno, a utilização do computador na aula de Matemática foi um estímulo importante tendo melhorado significativamente o seu aproveitamento nesta disciplina. Aproveitava todos os momentos para visualizar gráficos de funções que tinha estudado, analiticamente, em casa.

Dizia-me a professora: "O Zé também conseguiu. Muito sossegado..., quase sem se dar por ele, mas também conseguiu 'ver' coisas".

Este aluno era o colaborador mais directo da investigadora na montagem dos materiais audio-visuais. No entanto, não gostava muito de sentir que estava a ser gravado, dizia: "como estou a ser gravado, fico mais nervoso". O Zé podia ser considerado como o aluno 'bem disposto' do grupo.

As notas obtidas por este aluno nos três períodos escolares foram: 12, 12 e 14.

3.3.1.6. O grupo G5

O grupo G5, da turma T5, era constituído pelo Filipe e pelo Luís Carlos.

Estes alunos trabalhavam bem em grupo. De uma maneira geral, o Filipe deixava que o Luís Carlos introduzisse os valores no computador e que respondesse às questões. Só intervinha quando lhe parecia necessário dar uma ajuda ao Luís Carlos. Ambos gostavam muito de desafios. Mostravam um certo gosto por descobrir os 'como' e os 'porquês' das coisas. O cálculo repetitivo aborrecia-os. Dizia o Luís Carlos: "Ai... já me estou a chatear!... é igual ao outro de cima...". Aquilo que para outros alunos era o consolidar de conhecimentos, para estes alunos era uma tarefa 'fastidiosa'. Divertiam-se com alguns exercícios, "... este exercício que vem agora a seguir vai ser engraçado".

Filipe — Aluno com resultados escolares muito bons nas três disciplinas. Revelava muita facilidade em trabalhar com novas situações. Não gostava de resolver problemas rotineiros nem repetitivos. Resolvia muito rapidamente as questões que lhe eram colocadas, mas, como gostava e sabia muito bem trabalhar em grupo, não fazia 'brilharete' das suas capacidades. Ajudava muito o colega de grupo quer através do tempo que lhe proporcionava para resolver ele próprio as questões, quer através das perguntas que lhe colocava no sentido de o levar a pensar, com pormenor e profundidade, nas tarefas a realizar. A uma pergunta de um colega respondia quase sempre com uma nova pergunta. Trabalhava muito bem com o Luís Carlos. Não gostava de escrever e, por isso, esforçava-se pouco em dar justificações, "eu não gosto de escrever... os Engenheiros não sabem escrever...". Ajudou outros alunos da turma com quem estudava, regularmente, fora da sala de aula. Dizia a professora: "O Filipe é um miúdo que gosta de saber o porquê das coisas e conseguiu incutir nos colegas de grupo esse gosto, o gosto por 'ver' ". Era um aluno que realizava as tarefas com agrado. O Filipe podia ser considerado como o 'professor' do grupo.

As notas obtidas por este aluno nos três períodos escolares foram: 18, 17 e 19.

Luís Carlos- — Aluno sempre muito bem disposto e que mostrava um certo gosto por resolver problemas de Matemática. Era um aluno de nível médio. Desenvolvia processos de resolução de problemas bastante originais. Interrogava-se constantemente, quer quando fazia a leitura do enunciado das actividades quer quando se encontrava numa fase operacional de resolução do problema, "mas porquê estes pontos?". Dizia-me a professora: "O Luís diz-me que gosta agora mais da Matemática, que acha muito engraçado estar a pensar naquelas coisas. Ele dizia-me:'quando eu não era capaz de pensar... achava que era só decorar coisas... exercícios... tinha que decorar uma quantidade de exercícios... e agora vejo que não é preciso estar a decorar exercícios' ". Resolvia com calma e pormenor as questões. Experimentava e voltava a experimentar. O Luís Carlos nunca dava conta do toque da campainha para sair da sala de aula. Havia sempre mais um exemplo a experimentar, uma ideia a esclarecer, uma opinião a dar. Colaborou nesta investigação de uma maneira especial pela disponibilidade que sempre manifestou para responder às questões que a investigadora lhe colocava. O Luís Carlos podia ser considerado como o aluno 'reflexivo' do grupo.

As notas obtidas por este aluno nos três períodos escolares foram: 12, 12 e 13.

3.3.1.7. A professora

A professora obteve a Licenciatura em Ciências Matemáticas no ano de 1953, pela Faculdade de Ciências de Lisboa. Foi uma das primeiras Coordenadoras do Projecto Minerva da Escola. No âmbito desta função, trabalhou com alunos de 7° e 8° anos, em horário extra-lectivo, em actividades ligadas à linguagem Logo e à programação em Basic. Colaborou ainda na formação de professores promovida pelo Pólo do Projecto Minerva da FCT/UNL. É formadora do Centro de Formação de Professores Professor Lindley Cintra sediado na Escola Secundária Fernando Lopes Graça — Parede e do Centro de Formação Contínua de Professores de Cascais na Escola Secundária de S. João do Estoril, tendo já dinamizado três cursos, subordinados ao tema "O Computador na Aula de Matemática" e "A Geometria nos novos currículos do 2° e 3° Ciclos do Ensino Básico e Secundário". Tem recorrido, sempre que possível, a ferramentas computacionais para leccionar, de uma forma inovadora, alguns conteúdos programáticos aos alunos das suas turmas.

Lecciona a disciplina de Matemática no Ensino Secundário há 25 anos.

Aceitou participar nesta experiência porque:

a) tinha interesse em realizar este tipo de trabalho com os alunos;

b) já tinha trabalhado com a investigadora na elaboração de materiais de apoio ao ensino de determinadas unidades didácticas, recorrendo a ferramentas computacionais e na formação de professores.

c) gostava de trabalhar em equipa.

O facto de, muitas vezes, demorar uma aula para resolver uma questão, não a incomodava. Ficava muito preocupada quando se apercebia que os alunos diziam 'coisas' sem pensarem primeiro. Dizia-me: "... parecem-me coisas decoradas ou regras que alguém lhes mete na cabeça. Não os vejo a pensar por eles próprios. Eu gostava que eles se habituassem a 'brincar' com os exercícios. Eu não digo que eles não façam exercícios de Matemática, mas isso não é estudar Matemática... Têm que pensar no que estão a fazer. Os meus colegas já estão a dar as cónicas, mas eu vejo que eles ainda não sabem bem a matéria dos gráficos, que é muito importante, por isso penso que não devo avançar, embora esteja a começar a ficar preocupada com a falta de tempo".

Na sala de aula, a maior parte dos exercícios eram resolvidos, no quadro, pelos alunos. A professora 'passeava' entre as filas dos alunos. Ia tirando as dúvidas que estes lhe colocavam e, de vez em quando, sentia necessidade de se deslocar ao quadro para chamar a atenção para pequenos pormenores que lhe pareciam importantes. Era um ambiente de descontracção (que não é sinónimo de confusão ou distracção) que se vivia nestas aulas.

Os alunos ficavam, muitas vezes, no final das aulas em volta da secretária da professora. Esta não se limitava a tirar as dúvidas que os alunos colocavam. Conversava amigavelmente, dava conselhos, ouvia desabafos. Já depois de ter terminado o ano lectivo, no final de uma aula extra de dúvidas de preparação para a Prova de Aferição dizia a professora para um grupo de alunos:

> Ser professor também é uma coisa engraçada... A gente nunca consegue chegar ao final do ano e dizer que tudo correu bem. Ficamos sempre com a sensação que havia pessoas a quem podíamos ter ajudado mais e que, por uma razão ou outra, não conseguimos lá chegar. É uma coisa terrível chegar ao fim e pensar que não se conseguiu dar a volta a este ou àquele aluno. Penso sempre que podia ter actuado de outra maneira... estou sempre a ver se mudo mas, no fim, fico sempre com esta sensação. Com a vossa turma ficou-me uma dorzinha no coração... nunca consegui 'agarrar' esta turma e sentir que formavam na realidade uma turma.

Em resumo, a professora sentia necessidade de fugir a um certo tipo de aulas rotineiras, defendia uma abordagem intuitiva dos conceitos construída pelos alunos, não desvalorizando, no entanto, a abordagem analítica. Tentava que os alunos se habituassem a reflectir, com profundidade, na resolução das actividades que lhes eram propostas em vez de manejarem simples regras de cálculo. Manifestava muito interesse pelo trabalho em equipa.

3.4. Recolha de dados

Em qualquer investigação, os dados recolhidos e a sua análise prendem-se com os objectivos do estudo e com a metodologia a seguir. Nesta investigação procedeu-se à recolha de dados que permitissem caracterizar os processos desenvolvidos pelos alunos e dados para avaliar a intervenção didáctica.

Tal como é referido por Yin (1989) procurou diversificar-se a utilização de instrumentos e fontes de informação que permitissem a elaboração fundamentada e consistente de descrições, interpretações e conclusões acerca dos fenómenos em estudo. Assim, os dados analisados foram recolhidos através de:

- episódios de ensino, levados a cabo com três grupos de dois alunos;
- entrevistas informais aos alunos dos três grupos de trabalho;
- registo no diário da investigadora de comentários resultantes da observação de todas as aulas em que participou;
- gravações audio e vídeo do trabalho desenvolvido pelos alunos dos três grupos;
- recolha e análise dos trabalhos escritos de todos os alunos (fichas de actividades, testes de avaliação).

- recolha das opiniões dos alunos sobre a intervenção;
- reuniões semanais da investigadora com a professora;

3.4.1. Episódios de ensino

A investigação feita podia ter sido descrita como uma observação participante, no entanto, à luz das considerações teóricas anteriores, e tendo como principal fonte de recolha de dados episódios de ensino, por considerarmos que estes podiam proporcionar uma boa compreensão das construções matemáticas realizadas pelos alunos, optámos por a considerar como uma experiência de ensino.

Essencialmente uma experiência de ensino, como já foi referido, consiste numa série de episódios de ensino e entrevistas que abrangem um período alargado de tempo de seis semanas a dois anos (Cobb e Steffe, 1983).

Pretendendo que o estudo fosse realizado em condições o mais próximas possíveis da situação real de sala de aula, estes episódios de ensino realizaram-se com os alunos a trabalhar como habitualmente o faziam nas aulas extra-lectivas com recurso a ferramentas computacionais.

Dois dos episódios de ensino que envolveram os alunos do grupo G5, aconteceram no final do ano lectivo, em duas horas extra previamente combinadas com esses alunos. Estes dois episódios tiveram como principal objectivo que estes dois alunos desenvolvessem uma das fichas de trabalho que não tinham realizado por terem faltado a duas aulas.

Todos os episódios de ensino foram audio e vídeo gravados e posteriormente transcritos no sentido de obter todos os registos das interacções aluno/aluno, alunos/professora e alunos/investigadora. Estas gravações serviram de registo de todos os diálogos e gestos que tiveram lugar no decorrer de cada episódio, proporcionando, mais tarde, uma análise mais rica da construção dos conceitos matemáticos pelos alunos. Num estudo que visava a compreensão dos processos desenvolvidos pelos alunos em contextos computacionais houve, por parte da investigadora, a preocupação de proporcionar uma estreita interacção com os alunos, através de questões que os levassem a falar sobre o que estavam a fazer, de sugestões para os ajudar a ultrapassar dificuldades, de pedidos de explicação da realização de uma determinada tarefa, para os levar a reflectir sobre os seus processos de resolução e, muitas vezes, através da provocação de discussões entre os alunos que os ajudassem a verbalizar as suas ideias matemáticas e formas de actuação. De modo a serem observadas as aprendizagens que ocorrem durante o desenvolvimento de uma actividade, é admissível dar sugestões aos alunos (Kantowski, 1978).

Acreditando que não é apenas a intervenção do professor que influencia as construções dos alunos, mas as experiências dessas intervenções interpretadas em termos das estruturas conceptuais dos próprios alunos, quisemos sobretudo proporcionar situações de exploração que ajudassem os alunos a construir os seus próprios conceitos matemáticos. Assim, os alunos determinavam não só como, mas também que conceitos matemáticos construíam. O nosso principal objectivo no decurso desses episódios era o de proporcionar aos alunos a descoberta de padrões ou regularidades a partir do desenvolvimento de actividades e da reflexão sobre essas mesmas actividades à luz da sua própria experiência.

O acompanhamento mais sistemático do trabalho desenvolvido por três grupos de alunos foi a forma considerada mais adequada para compreender em profundidade os processos desenvolvidos pelos alunos. Esta opção, embora tenha originado uma diminuição da perspectiva geral da turma, proporcionou uma descrição fina dos esquemas conceptuais e dos processos desenvolvidos por esses alunos. Esta é uma das características do método qualitativo. De acordo com Merriam (1988), a investigação qualitativa tem como preocupação dominante os processos e não os produtos.

Todos os episódios de ensino realizados em horário extra-lectivo tiveram lugar na sala de computadores e duraram um tempo lectivo. Aconteceram de Março a Junho de 1995. De uma maneira geral, a investigadora entrava na sala antes da professora, para colocar, nos locais escolhidos, o material audio e vídeo necessário para a investigação em curso. Para que esta tarefa fosse levada a cabo depressa e com eficiência colaboraram com a investigadora os próprios alunos que não se pouparam a esforços para que, no ínicio da aula, todo o material estivesse operacional.

A professora e a investigadora circulavam entre os grupos de trabalho de modo a ajudá-los a ultrapassar algumas dificuldades que iam surgindo quer no que diz respeito à utilização das ferramentas computacionais quer no desenvolvimento das tarefas que lhes eram propostas. A investigadora, sempre que possível, sentava-se ao lado de um dos grupos que estavam em observação mais sistemática e tomava todas as notas que lhe pareciam importantes no seu diário. Nesses momentos, a investigadora questionava bastante os grupos de alunos no sentido de perceber em profundidade os processos desenvolvidos na realização das actividades propostas. Como os alunos se haviam habituado, em aulas anteriores dedicadas a outras unidades didácticas (sucessões, limites), à presença das duas professoras na sala, a investigadora era solicitada por qualquer um dos outros grupos de trabalho para esclarecer uma ou outra dúvida que ia surgindo. A investigadora correspondeu sempre a estas solicitações.

Todos os episódios de ensino reflectiram uma preocupação de respeitar as condições de trabalho dos alunos nas aulas extra-lectivas com recurso a ferramentas computacionais — resolução de fichas de actividades.

Embora os alunos que participaram nesta experiência de ensino tenham sido em número reduzido é possível, a partir da descrição do processo como estes alunos construíram os conceitos matemáticos, construir modelos gerais a ter em conta na elaboração do programa matemático de outros alunos e modelos específicos a ter em conta com um aluno particular num ambiente de ensino particular.

3.4.2. Entrevistas

A realização de entrevistas foi uma das fontes de dados desta investigação.

O tipo de entrevista que foi utilizada neste estudo pode ser denominada de *Entrevista informal* — conversa informal sobre algumas das actividades desenvolvidas, sem qualquer questionário prévio e, portanto, aberta e não estruturada. O primeiro objectivo destas entrevistas era compreender o que se tornava significativo para o aluno quando tratava de situações que envolviam o estudo das derivadas das funções. A grande vantagem destas entrevistas sobre outras técnicas de recolha de dados é que elas permitiram a captação imediata e corrente da informação desejada, permitiram correcções, esclarecimentos e adaptações que as tornaram eficazes na obtenção dessa mesma informação.

Durante as curtas entrevistas realizadas, tentámos ter sensibilidade, compreensão e concentração no sentido de captar os pequenos pormenores tão necessários, por vezes, à compreensão do fenómeno em estudo. Tentámos ter uma atitude de escuta atenta, numa tentativa de compreensão e não de crítica ou de avaliação do que era dito pelo entrevistado. Tentámos ainda não formular juízos de valor e não interromper o entrevistado.

As entrevistas foram realizadas, em grupo, na sala de computadores quer imediatamente antes de os alunos começarem as actividades propostas para essa aula, quer no final das actividades, algumas das vezes mesmo depois do toque de saída. O tempo de duração das entrevistas variou entre os 10 e os 30 minutos. Optou-se por fazer as entrevistas em grupo, uma vez que também foi a metodologia de trabalho utilizada durante as aulas com o apoio de ferramentas computacionais, proporcionando uma situação semelhante à experienciada pelos alunos durante a experiência de ensino. De acordo com Patton (1987), este tipo de entrevista é mais agradável para os participantes pois sentem-se mais apoiados. Estas entrevistas tinham por base a discussão ou o esclarecimento e aprofundamento do processo de resolução de algumas das actividades. Assim, com um carácter não estruturado, aconteciam em função dos desempenhos dos alunos.

Como aliás acontecia durante os episódios de ensino, durante a situação de entrevista a investigadora explicou aos alunos algumas situações que lhe pareceram estar na origem de raciocínios menos correctos. Por vezes, eram os próprios alunos que solicitavam a intervenção da investigadora para confirmar as suas conjecturas.

Todas as entrevistas foram audio-gravadas deixando, assim, a entrevistadora livre para prestar toda a sua atenção aos entrevistados. Como a gravação audio tem o inconveniente de não registar as expressões faciais, os gestos, as mudanças de postura, etc., algumas destas entrevistas foram vídeo gravadas.

3.4.3. Diário de Intervenção

A investigadora registou todos os dados e comentários que lhe mereceram atenção no decorrer da observação de todas as aulas em que participou, quer se tratasse de aulas extra-lectivas com recurso a ferramentas computacionais quer de aulas em horário lectivo, na sala habitual.

3.4.3.1. Aulas em horário extra-lectivo

É fundamental presenciar os acontecimentos no contexto que se quer compreender. Assim, as observações destas aulas constituíram também uma técnica importante da recolha de dados desta investigação.

Uma vez que o estudo tinha como objectivo estudar processos desenvolvidos pelos alunos, pensámos que actuando muitas das vezes como professores e desenvolvendo relações próximas dos alunos podíamos ajudá-los a trabalhar em contextos favoráveis à construção do conhecimento matemático. Podemos então considerar que, nestas aulas, foi feita uma observação não estruturada. Uma pesquisa qualitativa, contrariamente a uma pesquisa do tipo positivista, deixa muito espaço à improvisação, assim como ao ajustamento aos acontecimentos que se produzem na altura da investigação. Assim, a investigadora tentou obter um diário o mais pormenorizado possível dos diálogos dos alunos.

Neste estudo, a investigadora participou no contexto em estudo e, ao mesmo tempo, observou-o e analisou-o. Assim, foi co-autora e co-aplicadora dos instrumentos de investigação.

Para participar nestas aulas a investigadora entrava na sala antes da professora para preparar o material audio e vídeo de acordo com os lugares dos alunos intervenientes. Muitas vezes, este trabalho era apoiado por alguns dos alunos das turmas.

Todas estas aulas foram audio e vídeo gravadas (este tipo de registo podia permitir obter alguma informação imediata, natural e pormenorizada das situações) e registadas notas no diário da investigadora. Estas notas diziam sobretudo respeito a comentários da investigadora ou a levantamento de questões para aprofundamento nas entrevistas feitas aos alunos. A observação informal dos alunos ou a escuta das suas conversas enquanto desenvolviam as actividades proporcionou condições práticas de recolha de dados.

3.4.3.2. Aulas em horário lectivo

Há várias posições quanto à participação do investigador ao longo das observações, desde a posição de observador totalmente participante à de investigador meramente observador. A investigadora não se colocou em nenhuma destas posições extremas da escala. Ao longo destas aulas, a investigadora realizou dois tipos de observação: uma observação directa e uma observação participante, de acordo com a definição de Costa (1986). Existiram momentos com graus de participação muito diferentes, dependendo dos acontecimentos que iam surgindo. A presença do investigador leva, a maior parte das vezes, a algumas modificações no comportamento das pessoas observadas. Neste estudo, no entanto, não foram evidentes grandes sinais de perturbação provocados pela presença da investigadora, quer na professora quer na generalidade dos alunos das duas turmas.

Para observar estas aulas a investigadora entrava com a professora na sala de aula e sentava-se na parte posterior da sala. A turma T5, duas vezes por semana, tinha aulas numa sala com as carteiras dispostas em U. Aí, a investigadora sentava-se em qualquer lugar, ao lado dos alunos. Nesta situação, os alunos acabaram por partilhar com a investigadora as suas dificuldades, tal como o faziam com os colegas que se encontravam ao seu lado.

Em todas estas aulas foram registadas notas no diário da investigadora. Estas notas eram de dois tipos diferentes. Umas tinham um carácter de tipo observacional, outras eram registos de comentários da investigadora, quer de carácter interpretativo quer mesmo de juízos do que ia observando.

De sublinhar ainda que, algumas das fichas que faziam parte das actividades a desenvolver na sala de computadores mas que não obrigavam à sua utilização, foram distribuídas a todos os alunos das duas turmas para resolverem em aulas dedicadas à resolução de exercícios. Durante a realização destas actividades a investigadora acabou por fazer uma observação participante. Tal como a professora, circulava pela sala para ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades com que estes se iam deparando. As respostas dadas pelos alunos a estas fichas foram fotocopiadas e constituíram um complemento dos dados a analisar.

A observação das aulas em horário lectivo teve como objectivos principais: permitir que a investigadora tivesse uma visão global do funcionamento das turmas, permitir que esta percebesse o tipo de actividades desenvolvidas no que dizia respeito ao tema das derivadas de funções para assim poder compreender melhor os processos desenvolvidos pelos alunos e ainda obter dados importantes no que diz respeito ao modo como os alunos envolvidos na experiência de ensino estabeleciam conexões entre os conceitos construídos nas aulas apoiadas por ferramentas computacionais e a sua aplicação nas actividades que então lhes eram propostas.

3.4.4. Trabalhos escritos dos alunos

Para a recolha de dados foram ainda consideradas as respostas dadas pelos alunos às fichas de actividades propostas durante a experiência de ensino e algumas das questões colocadas nos dois últimos testes de avaliação.

3.4.4.1. Fichas de actividades

Em todas as aulas em que os alunos trabalharam com o computador realizavam, em grupo, uma ficha de trabalho. À medida que os alunos davam por concluída a resolução de cada uma dessas fichas, a investigadora recolhia-as para fotocopiar e corrigir. Estas correcções levantaram questões pertinentes a tratar com os alunos no início ou no final da aula seguinte e estiveram muitas vezes na origem de pequenas entrevistas feitas aos alunos.

3.4.4.2. Testes escritos de avaliação

Foram ainda analisadas as respostas dadas pelos alunos dos três grupos intervenientes na experiência de ensino a algumas das questões dos dois últimos testes de avaliação do terceiro Período (Anexo 2). Foram consideradas sobretudo as questões que diziam respeito à interpretação de gráficos e à resolução gráfica de questões. A professora e a investigadora consideraram importante, nesta fase de trabalho, introduzir nos testes de avaliação, questões relacionadas com a interpretação e exploração de gráficos uma vez que era um dos temas em que a professora tinha insistido mais durante as aulas e, além disso, eram temas 'obrigatórios' das Provas de Aferição e Específica para as quais os alunos se estavam a preparar. Uma dessas questões cujo resultado foi alvo de análise, foi adaptada de uma outra investigação (Scher, 1993).

3.4.5. Opinião dos alunos sobre a intervenção didáctica

Foram ainda consideradas as respostas dadas pelos alunos a dois questionários (um respondido pelos alunos envolvidos na experiência, outro respondido pelos restantes alunos) no sentido de auscultar as suas opiniões acerca da experiência vivida. Os alunos preencheram estes questionários no final do ano lectivo e deram opiniões consideradas muito pertinentes em relação à experiência vivida.

3.4.6. Reuniões com a professora

Foram feitas reuniões semanais da investigadora com a professora para: (a) avaliar o trabalho que estava a ser desenvolvido; (b) corrigir e analisar as respostas dadas pelos alunos a algumas das fichas de actividades; (c) analisar algumas das respostas dadas pelos alunos a questões dos dois últimos testes de avaliação; (d) aferir estratégias de intervenção; (e) elaborar outras actividades consideradas importantes para a construção de determinados conceitos e que não tinham sido consideradas quando da planificação da intervenção didáctica.

3.5. Procedimentos da análise de dados

A análise de dados realizada teve como referências os objectivos da investigação e a revisão de literatura efectuada. O período em que esta análise foi levada a cabo pode ser considerado como um movimento de vai e vem entre os dados recolhidos e a teoria.

Na análise dos dados, as gravações vídeo foram utilizadas como complemento das transcrições dos diálogos travados durante os episódios de ensino ou das entrevistas, permitindo que a investigadora recordasse gestos utilizados pelos alunos e que permitiram uma melhor compreensão do seu raciocínio.

Uma primeira análise não estruturada teve lugar no decorrer da própria intervenção didáctica. A investigadora registou, no seu diário, notas e comentários que considerou importantes, recolheu e analisou as fichas de actividades, analisou as respostas dadas pelos alunos aos dois últimos testes de avaliação. Esta primeira análise permitiu obter dados que levaram, por vezes, a que a investigadora em colaboração com a professora alterassem a planificação da intervenção didáctica acrescentando actividades que pudessem ajudar os alunos a uma melhor interiorização dos conceitos envolvidos.

Depois de terminada a intervenção didáctica (nos meses de Junho, Julho e Agosto de 1995) a investigadora transcreveu todos os episódios de ensino e as entrevistas tendo a preocupação de referir formas de comunicação não verbal utilizadas pelos alunos (por exemplo, os alunos utilizavam várias vezes a mão para indicar a inclinação de uma recta ou o movimento das sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente, referiam-se aos objectos apontando com o dedo no ecrã do computador). Entre Outubro de 1995 e Julho de 1996 procedeu-se a uma primeira análise dos dados. Entre Setembro de 1996 e Dezembro de 1996 procedeu-se a uma reformulação da primeira análise de dados feita, tendo em consideração o aprofundamento do quadro de referência teórico.

3.5.1. Análise de conteúdo dos dados dos episódios de ensino

Para tentar compreender os processos desenvolvidos pelos alunos na construção do conceito de derivada e suas aplicações, em ambientes computacionais, tivemos que proceder a uma análise de conteúdo de todo o material recolhido.

Com frequência a informação obtida através da observação ou de outras técnicas utilizadas pela investigação qualitativa é sujeita a este tipo de análise. "A análise de conteúdo é hoje uma das técnicas mais comuns na investigação empírica realizada pelas diferentes ciências humanas e sociais" (Vala, 1986, p. 101).

A análise de conteúdo como um conjunto de técnicas de análise das comunicações visa obter, por procedimento sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção destas mensagens (Bardin, 1977).

Podemos considerar duas categorias de análise de conteúdo:

- *Análise de conteúdo quantitativa*: a unidade de informação é a frequência com que aparecem certas características do conteúdo.
- *Análise de conteúdo qualititativa*: é a presença ou ausência de uma dada característica de conteúdo ou de um conjunto de características que é tomada em consideração.

No nosso estudo foi feita uma análise de conteúdo qualitativa. Para isso foram tidas em conta as seguintes operações: (a) delimitação dos objectivos e definição de um quadro de referência teórico orientador da pesquisa; (b) constituição de um corpus; (c) definição de categorias; e (d) definição de unidades de análise.

O *corpus* da análise foi constituído por todo o material a analisar de acordo com os objectivos e o quadro de referência teórico da investigação. Em seguida, considerando a totalidade do texto procedeu-se à sua classificação através de rúbricas significativas — as categorias de análise. Por último, codificaram-se partes de conteúdo (unidades de análise) visando a sua categorização.

Podemos considerar três etapas para a análise de conteúdo, no entanto, estas etapas não são independentes umas das outras.

Entre a primeira etapa — *descrição* — em que se procede à enumeração das características do texto e a última etapa — *interpretação* — em que se dá significado a essas características, existe uma fase intermédia — *a inferência* — que vai permitir a passagem de uma etapa à outra. A *inferência* é uma dedução lógica, admite-se uma proposição em virtude da sua ligação com outras proposições já aceites como verdadeiras. Segundo Vala (1986, p. 104) "A finalidade da análise de conteúdo será pois efectuar inferências, com base numa lógica explicitada, sobre as mensagens cujas características foram inventariadas e sistematizadas".

A segunda etapa corresponde a um procedimento mais intuitivo, mas mais maleável e adaptável a índices não previstos.

Pode dizer-se finalmente, que o que caracteriza a análise qualitativa é o facto de a inferência se fundamentar na presença do índice e não na frequência da sua aparição, em cada comunicação individual (Bardin, 1988).

3.5.2. Formação de categorias

Vala (1986, p. 110) afirma que: "A classificação, a categorização, é uma tarefa que realizamos quotidianamente com vista a reduzir a complexidade do meio ambiente, estabilizá-lo, identificá-lo, ordená-lo ou atribuir-lhe sentido. A prática da análise de conteúdo baseia-se nesta elementar operação do nosso quotidiano e, tal como ela, visa *simplificar* para potenciar a apreensão e se possível a explicação".

Este autor refere ainda que a construção de categorias pode ser feita *a priori* ou *a posteriori*, ou através da combinação destes dois processos.

Para a análise de conteúdo realizada neste estudo não se dispunha, à partida, de um sistema de categorias pré-definidas. De acordo com os dados recolhidos e com as questões de investigação, estabeleceram-se categorias que, de algum modo, facilitassem a análise de dados. Elas emergiram e foram sendo progressivamente refinadas ao longo das várias etapas da análise de dados.

Vala (1986, p. 112) afirma que: "...definido o quadro teórico e um leque de hipóteses, [o investigador] parte para um trabalho exploratório sobre o *corpus*, o que lhe permite, através de sucessivos ensaios, estabelecer um plano de categorias que releva simultaneamente da sua problemática teórica e das características concretas dos materiais em análise. Neste caso, as referências teóricas do investigador orientam a primeira exploração do material, mas este, por sua vez, pode contribuir para a reformulação ou alargamento das hipóteses e das problemáticas a estudar".

Uma primeira leitura da totalidade dos dados originou um grande número de categorias. Uma segunda leitura, mais pormenorizada das mesmas, proporcionou a codificação de partes do texto em relação às categorias que haviam sido fixadas. Terminada esta segunda leitura foi feito um reajustamento do sistema de categorias inicialmente fixado. Nessa altura sentiu-se a necessidade de uma nova codificação tendo em conta as alterações efectuadas.

Foi feita uma cópia destas transcrições para posterior recorte e agrupamento por categorias de modo a obter pequenos dossiers para cada uma delas. A partir destes dossiers foi feita a análise dos dados.

Em relação às aulas observadas sem recurso a ferramentas computacionais, foram registadas notas no diário da investigadora. Estas notas estavam organizadas tendo em conta: o papel do professor, o papel do aluno, o ambiente da aula e as relações interpessoais.

3.6. Limitações do estudo

Partindo do princípio que a investigadora, como pessoa e como professora, tem uma perspectiva pessoal da realidade que interpreta à sua maneira, tem que se considerar e aceitar uma interferência da investigadora no objecto investigado, nomeadamente no que diz respeito à recolha e análise de dados. De uma maneira geral, as investigações sobre processos de aprendizagem seguem uma linha metodológica em que o investigador se distancia do objecto de investigação, para evitar enviesamentos à observação e a fim de validar os resultados obtidos nessas investigações. As experiências de ensino permitem que o investigador interfira directamente com o objecto investigado para melhor compreender e descrever os processos de aprendizagem.

Na experiência de ensino implementada a investigadora não conseguiu acompanhar pormenorizadamente cada um dos três grupos de alunos uma vez que pelo menos dois destes funcionavam simultaneamente. O facto de ter tido um triplo papel de entrevistador, professor e investigador tem limitações e benefícios.

Além disso, a solicitação da investigadora por parte de outros alunos, diminuiu o tempo de observação directa dos grupos escolhidos. Grande parte dos dados foi obtida recorrendo a gravações audio e/ou vídeo do trabalho desenvolvido em cada um dos grupos de trabalho. Esta dificuldade poderia ter sido minorada com o apoio de uma equipa de investigação.

O estudo das derivadas de funções na altura em que teve lugar a experiência de ensino era um tema do último conteúdo programático do 11° ano de escolaridade. O facto desta investigação ter envolvido alunos do 12° ano pode ter originado algumas discrepâncias à partida. A alguns dos alunos investigados tinha sido leccionado esse tema no ano lectivo anterior ainda que, precisamente por se tratar do último capítulo, tenha sido feito numa certa corrida contra o tempo; a outros alunos, o tema era completamente novo.

O estudo decorreu no 2° e 3° períodos lectivos, momento em que os alunos sentiam a aproximação das Provas que iriam ditar o seu futuro — as Provas de Aferição e Específica. Assim, ainda que não se mostrasse viável a alteração da programação, o momento pode não ter sido o mais adequado. Nas últimas aulas, alguns alunos evidenciavam um certo cansaço e alguma ansiedade em relação a essas Provas.

Ainda que actividades semelhantes tivessem sido levadas a cabo quer pela professora quer pela investigadora com outras turmas, em anos lectivos anteriores, as fichas de trabalho utilizadas neste estudo não tinham sido, na sua globalidade, previamente testadas.

O tipo de actuação induzido pelo uso do *software* de gráficos utilizado nesta investigação implicou a tradução dos sistemas de representação: expressão analítica —> gráfico. Ficou um pouco desactivada a sequência inversa que, de acordo com os objectivos do estudo e com a revisão de literatura deve ser explorada com os alunos.

Alguns alunos, por não estarem habituados a este tipo de trabalho evidenciaram falta de confiança nas suas próprias capacidades que os levava a uma certa dependência da professora e/ou investigadora. Deviam ter sido desenvolvidas, em anos lectivos anteriores experiências semelhantes.

Cabe-nos ainda sublinhar que com este estudo se pretendia compreender processos mais do que obter generalizações. O estudo desenvolveu-se num determinado contexto e envolveu alunos que têm as suas características próprias. Para além de conseguirmos dar algumas respostas às questões inicialmente colocadas, foram também levantadas outras questões a aprofundar em investigações futuras.

Capítulo 4

Intervenção didáctica

Este capítulo em que se descreve a intervenção didáctica está dividido em quatro secções: modelo orientador da intervenção, descrição da intervenção, o programa *A Graphic Approach to the Calculus* e algumas questões que se evidenciaram ao longo da intervenção.

4.1. Modelo orientador da intervenção

Para compreender os processos desenvolvidos pelos alunos no estudo do conceito de derivada e suas aplicações, torna-se necessário ter em conta o contexto educacional e a estrutura cognitiva dos alunos. As ideias matemáticas novas não devem ser ensinadas através de uma simples definição mas através de um conjunto de exemplos baseados em conceitos prévios presentes no repertório dos alunos. Devem ser considerados os conceitos imagens e os conceitos definição que os alunos têm e a interacção destas estruturas conceptuais com as múltiplas representações proporcionadas por um ambiente computacional (Vinner e Dreyfus, 1989).

Tradicionalmente, os matemáticos têm introduzido o conceito de derivada através de uma abordagem intuitiva baseada na ligação entre ideias geométricas e simbólicas. A estratégia comum usada para determinar a derivada de uma função num ponto P sobre a curva representativa dessa função é escolher um segundo ponto sobre a curva Q e traçar a recta secante que passa por P e por Q. Imaginando que o ponto Q se pode mover ao longo da curva em direcção a P, no processo limite a recta secante aproxima-se da recta tangente à curva em P, se a tangente existir. Ao declive dessa recta tangente dá-se o nome de derivada da função em P. Experiências anteriores dos alunos com a geometria (secantes, tangentes e declive) influenciam o desenvolvimento da compreensão de um novo conceito matemático. Um aluno que tenha estudado Geometria Euclideana pode reter a imagem de que uma tangente é uma recta que encontra uma circunferência num único ponto. Quando é introduzido o conceito de derivada na Análise, esse aluno poderá ter dificuldade em visualizar uma recta tangente que intersecta um gráfico em mais do que um ponto ou uma tangente que atravessa o gráfico.

Esta primeira noção geométrica do conceito de derivada, no entanto, passa a desempenhar um papel muito secundário no decorrer do estudo das derivadas. Complexas regras de derivação fazem rapidamente esquecer o conceito geométrico de derivada de uma função num ponto. Quando se pergunta a um aluno o que sabe dizer a respeito do conceito de derivada, é usual que as regras de derivação sejam a primeira coisa a ser evocada. Muitas vezes, o êxito nos testes de avaliação são consequência do conhecimento e aplicação dessas mesmas regras.

Numa época em que a sociedade requer uma Escola como sendo um espaço de aprendizagem da comunicação e cooperação, um espaço de desenvolvimento de pessoas no sentido de serem capazes de resolver problemas de uma forma crítica e criativa, há que renovar o currículo da Matemática pondo a ênfase em actividades que coloquem os alunos em situações de reflexão e formulação de problemas.

Os autores dos Programas de Matemática para o 10°, 11° e 12° Anos (DES, 1997, p. 3) não são alheios a estes desafios quando referem como finalidades da disciplina:

"• Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.

• Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.

• Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constituam suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.

- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade."

Acreditamos numa abordagem experimental da Matemática e na organização da construção do conhecimento à volta de actividades dos alunos. É necessário mudar o ensino tradicional baseado na predominância de uma abordagem algorítmica e numa visão de prova como um simples consentimento contractual mais do que um meio de convencimento ou de levantar incerteza.

A experiência de ensino realizada tinha como objectivos fundamentais:

- Desenvolver nos alunos a compreensão de conceitos relacionados com o estudo das derivadas antes de introduzir técnicas convencionais de manipulação simbólica;
- Ajudar os alunos a desenvolver compreensões mais profundas dos conceitos matemáticos que dizem respeito às derivadas de funções;
- Permitir que os alunos trabalhassem, recorrendo a ferramentas computacionais, com diferentes representações de funções, incluindo fórmulas, gráficos e tabelas;
- Proporcionar aos alunos, com a ajuda de ferramentas computacionais, possibilidades da visualização dinâmica que tornam o contexto de gráficos muito mais acessível;
- Proporcionar aos alunos, com a ajuda de ferramentas computacionais, a exploração das conexões existentes entre as representações analíticas e gráficas de funções;
- Proporcionar aos alunos, com a ajuda de ferramentas computacionais, a resolução gráfica de questões ligadas ao estudo das derivadas em detrimento da mera utilização de complexas regras de cálculo;
- Ajudar os alunos a fazer conexões entre as várias ideias matemáticas que dizem respeito ao estudo das derivadas;
- Encorajar os alunos a pensar nos problemas mais do que confiar na memorização de procedimentos;
- Encorajar os alunos a defender e debater conjecturas matemáticas;
- Encorajar os alunos a falar uns com os outros acerca da Matemática.

Assim, a estratégia de ensino levada a cabo nesta investigação tentou desenvolver nos alunos o conceito de derivada através de uma sequência de aprendizagem construída sobre a visualização de gráficos proporcionada pelo programa *A Graphic Approach to the Calculus*. Este programa usa as possibilidades gráficas e dinâmicas do computador para permitir que os alunos construam uma base cognitiva da noção de derivada para formalizações posteriores.

4.2. Descrição da intervenção didáctica

A intervenção desenvolveu-se com alunos de duas turmas do 12° Ano, no segundo e terceiro períodos do ano lectivo de 1994/1995.

4.2.1. Primeira fase da intervenção

A partir de Janeiro de 1995 a investigadora começou a participar nas aulas extra-lectivas com recurso a ferramentas computacionais em que participavam, com regularidade, oito alunos da turma T3 e nove alunos da Turma T5, duas horas por semana — uma hora para cada turma.

Nesta primeira fase de participação nas aulas, a investigadora pretendia:

- Ajudar a professora a apoiar os vários grupos de alunos;
- Observar como é que os alunos trabalhavam em grupo;
- Habituar os alunos à presença de mais uma professora na sala, a quem podiam recorrer para ultrapassar qualquer dificuldade.

Durante este período, os alunos trabalharam com uma Folha de Cálculo (Excel 4.0) para explorar actividades que diziam respeito ao estudo das sucessões. Algumas das fichas utilizadas nesta fase de trabalho tinham sido preparadas pela professora e pela investigadora e, algumas delas, já tinham sido utilizadas por ambas, em anos anteriores, com alunos do 11° Ano.

4.2.2. Segunda fase da intervenção

Embora na altura em que se desenvolveu a experiência de ensino, a unidade — Derivadas de Funções — constituísse um conteúdo programático a ser leccionado no 11° Ano, este tema ou não tinha sido leccionado ou tinha sido feito de uma forma que levava a que alguns dos alunos envolvidos neste estudo, evocassem pouco mais do que uma ou outra regra de derivação.

Com o objectivo de proporcionar aos alunos a construção dos conceitos respeitantes a essa unidade didáctica, a professora e a investigadora elaboraram um conjunto de fichas de actividades para serem desenvolvidas recorrendo, na sua maioria, ao programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus.* Algumas dessas actividades foram adaptadas de outras investigações.

Esta fase da experiência de ensino abrangeu um total de trinta e seis sessões, vinte na sala de computadores e dezasseis na sala habitual.

4.2.2.1. Aulas extra-lectivas

As aulas extra-lectivas, apoiadas por ferramentas computacionais foram orientadas pela professora e pela investigadora. Os alunos desenvolveram as actividades propostas nas fichas de trabalho, em pares que se mantiveram de certo modo estáveis ao longo de toda a experiência de ensino. A ausência de um ou outro aluno numa dessas aulas obrigou a uma alteração pontual da díade.

4.2.2.2. Aulas lectivas

As aulas na sala habitual foram orientadas pela professora. Aqui, em algumas aulas práticas e, de uma maneira particular, nas aulas dedicadas à resolução de algumas das actividades das fichas de trabalho preparadas para as aulas extra-lectivas (a professora considerou que todos os alunos poderiam beneficiar da sua resolução), mas que não exigiam a utilização de computadores, a investigadora deslocou-se pela sala para ajudar a professora a corresponder às várias solicitações dos alunos.

Nestas aulas, os alunos mantiveram os lugares habituais (de uma maneira geral, os alunos que trabalhavam em grupo nas aulas extra-lectivas, sentavam-se ao lado uns dos outros nestas aulas) e trabalhavam aos pares na resolução das actividades que lhes eram propostas.

4.2.3. Fichas de actividades

As dez fichas de actividades propostas aos alunos foram elaboradas em conjunto pela investigadora e pela professora. Na concepção dessas actividades procurou dar-se cumprimento aos conteúdos fundamentais do programa então existente, mas tendo em conta as recomendações dos autores dos Novos Programas de Matemática (DGBS, 1991, p. 30) que referem que "o estudo das funções é fundamental para a interpretação das leis que regulam os mais variados fenómenos do mundo em que vivemos. (...) A primeira e a segunda derivadas são usadas no estudo do comportamento de funções (...), no traçado dos respectivos gráficos e ainda na determinação de tangentes e normais a uma curva ".

E, estes mesmos autores, quando se referem aos *recursos* a serem utilizados, afirmam que: "o computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a alunos e professores, sugerindo-se a sua utilização sempre que oportuno e possível" (DGBS, 1991, p.34).

As fichas de actividades foram delineadas para serem, muitas delas, levadas a cabo com a ajuda do programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus*. Este programa, acompanhado de actividades adequadas, criou um ambiente de sala de aula que propiciou uma maneira diferente de construir conceitos.

E como Tall (1989) afirma, o computador oferece um número de vantagens didácticas:

- Fornece possibilidades de visualização dinâmica que tornam o contexto de gráficos muito mais acessíveis e, correctamente explorados, podem ajudar a exibir as relações necessárias entre as representações algébricas e geométricas;
- Se o contexto de gráficos se torna mais familiar, a unidade da representação gráfica de objectos funcionais que ele fornece pode ajudar a estabelecer o conceito imagem dos conceitos fundamentais, enriquecendo o *stock* de imagens.
- Através de actividades com simulações interactivas, os alunos podem ser iniciados na Matemática como uma actividade científica construtiva.

A investigação foi então conduzida no sentido de tentar compreender aquilo que os alunos conseguem atingir no seu processo de aprendizagem quando lhes é proporcionado um tipo de ensino em que os alunos constroem o seu próprio conhecimento através da realização de actividades que têm como suporte ferramentas computacionais. A revisão de literatura feita forneceu uma base para preparar as questões a serem exploradas. Assim, como já foi referido, algumas das questões utilizadas coincidem, em parte, com questões usadas em estudos anteriores.

No início de cada sessão, todos os alunos que participaram na experiência de ensino, receberam uma ficha para resolver em grupo e com o apoio do computador. Essas fichas, depois de devidamente exploradas e respondidas eram entregues à investigadora ou à professora. Todas essas fichas foram devidamente corrigidas pela professora e/ou investigadora e devolvidas aos alunos na aula seguinte. A investigadora aproveitou o momento de entrega das fichas corrigidas com as respectivas anotações para discutir, perceber ou aprofundar com os alunos pequenos pormenores de resolução de algumas das actividades. Nenhuma das fichas foi corrigida em grande grupo uma vez que, cada grupo caminhava ao seu ritmo o que originava, por vezes, que numa mesma aula os alunos desenvolvessem actividades diferentes. Pode ler-se no diário da investigadora: "Nesta aula as tarefas foram bastante diversificadas. O Paulo, a Cristiana e o Luís Filipe fazem o estudo completo de uma função que a professora tinha escrito no quadro ($f(x) = \log|(x+1)/x|$), através da observação do seu gráfico exibido no ecrã do computador. O João, o Pedro e o Filipe resolvem a ficha VI. Apenas recorreram ao computador para resolver a última actividade da ficha. Os ' Henriques ' resolviam a ficha IX".

Foram realizadas, pela maior parte dos alunos que participaram nas sessões com recurso a ferramentas computacionais, todas as fichas de actividades. Destas dez fichas, cinco delas (fichas IV, V, VI, VII, VIII e IX) fizeram parte das actividades desenvolvidas pelos alunos, na sala de aula habitual, uma vez que a professora considerou que a sua resolução seria útil a todos os alunos e, para a sua resolução, não era imprescindível o uso de ferramentas computacionais.

Em seguida, faz-se uma caracterização das dez fichas de actividades utilizadas ao longo desta intervenção. O Anexo 1 apresenta cada uma delas.

4.2.3.1.Caracterização das actividades

Ficha I — A primeira parte desta ficha foi dedicada ao estudo do declive de uma recta. As actividades propostas pretendiam que os alunos concluíssem que o declive de uma recta não dependia dos pontos considerados sobre essa mesma recta, relacionassem o declive das rectas com a monotonia das funções que elas representavam, concluíssem que o declive de uma recta paralela ao eixo dos *xx* era zero, e que era infinito o declive de rectas paralelas ao eixo dos *yy*.

A segunda parte desta ficha tinha como objectivo levar os alunos a concluir que a taxa de variação média de uma recta era constante quaisquer que fossem os intervalos considerados, ao contrário do que acontecia com uma curva.

Na terceira e última parte desta ficha era abordada a noção de derivada de uma função num ponto. Pretendia-se levar os alunos a construir a noção de derivada de uma função num ponto através da sua interpretação geométrica — declive da recta tangente à curva representativa da função no ponto. Propunha-se a visualização, recorrendo ao computador, das sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente à curva no ponto e a visualização da tabela dos respectivos declives.

Ficha II — Esta ficha tinha como objectivo o estudo das derivadas laterais de uma função em determinados pontos críticos, a partir da visualização do respectivo gráfico exibido no ecrã do computador.

A primeira actividade propunha a determinação das derivadas laterais de uma função módulo no seu "bico", pretendendo que os alunos concluíssem não existir derivada da função nesse ponto, por serem diferentes as suas derivadas laterais.

Na segunda actividade, pretendia-se que os alunos determinassem a derivada de uma função num extremo do intervalo do domínio da função e que concluíssem que, nesse caso, a existência de uma das derivadas laterais implicava a existência de derivada da função no ponto.

A terceira actividade propunha a determinação das derivadas laterais de uma função no seu ponto de inflexão.

A determinação das derivadas laterais de duas funções em pontos de descontinuidade, com o objectivo de levar os alunos a não recearem falar de derivadas infinitas, constituíam a quarta e quinta actividade.

Ficha III — Esta ficha era dedicada ao estudo da função derivada. As actividades propostas pretendiam que os alunos utilizassem o computador para obter a sobreposição dos gráficos das funções e das respectivas funções derivadas. Em seguida, os alunos deviam utilizar os gráficos das funções derivadas para, por simples leitura de valores, determinarem a derivada das funções em determinados pontos.

Ficha IV — A primeira actividade em que se pedia o traçado de gráficos representativos do enchimento de recipientes de diferentes formas, a partir de uma torneira de caudal constante, pretendia compreender as noções construídas pelos alunos no que diz respeito a linearidade, interpretação da variação e interpretação da variação na variação. Estas actividades foram adaptadas da investigação levada a cabo por Ponte (1984).

A segunda actividade propunha o traçado gráfico da função derivada de algumas funções traduzidas apenas na sua representação gráfica. Pretendia compreender-se até que ponto os alunos tinham construído uma noção geométrica de função derivada e se manifestavam, ou não, necessidade de recorrer às regras de derivação para determinar a função derivada de funções representadas na sua representação gráfica.

A terceira actividade pedia a indicação, por observação gráfica, de um valor aproximado da derivada de cada uma das funções apresentadas no ponto de abissa zero, ponto crítico de algumas das funções, e ainda a indicação da existência ou não da rectas tangente a cada uma dessas funções nesse ponto. Pretendia-se perceber até que ponto os alunos tinham construído uma noção geométrica de derivada de uma função num ponto e de recta tangente a uma curva num ponto. Esta questão foi adaptada da investigação de Ferrini-Mundi (1993).

Na quarta actividade, eram dados os gráficos de duas funções no mesmo referencial cartesiano e perguntava-se qual das funções crescia mais rapidamente num determinado intervalo. Esta actividade pretendia perceber as noções que os alunos tinham construído de declive e de altura e se estes dois conceitos não entravam em conflito. Esta actividade foi adaptada da investigação de Clement (1989).

A quinta actividade propunha a comparação de intervalos de crescimento de uma função representada graficamente.

Ficha V — Na primeira actividade pedia-se a determinação, por observação gráfica, da derivada de uma função em determinados pontos críticos (extremos relativos e extremos do intervalo em que a função estava definida). Com esta actividade pretendia-se, mais uma vez, compreender qual o conceito construído pelos alunos de derivada de uma função em determinados pontos críticos.

Na segunda actividade pedia-se a derivada de uma função, representada graficamente, num ponto de descontinuidade. Pretendia perceber-se a noção geométrica de derivada de uma função num ponto de descontinuidade construída pelos alunos, a partir dos exemplos visualizados no ecrã do computador.

A terceira actividade tinha como principal objectivo perceber qual a noção construída pelos alunos da rotação de rectas secantes aproximando-se da recta tangente a uma curva num ponto e a sua compreensão da recta tangente como um limite. Esta actividade foi adaptada da investigação de Orton (1983).

Na quarta actividade eram apresentadas duas funções, traduzidas gráfica e analiticamente e pedia-se aos alunos que, sem efectuarem cálculos, indicassem as derivadas dessas funções no ponto de abcissa 1 (minimizante de uma das funções). Pretendia-se verificar o tipo de estratégia privilegiado pelos alunos na determinação da derivada de uma função num ponto na presença das suas traduções gráfica e analítica.

Nas três últimas actividades, era apresentado o gráfico de uma função e perguntava-se qual, de entre quatro gráficos dados, representava o gráfico da sua função derivada. Pretendia-se compreender como é que os alunos relacionavam o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada, dando particular atenção ao tipo de estratégias utilizadas pelos alunos para levar a cabo esse tipo de tarefa. Para uma primeira selecção, os alunos privilegiavam características dos pontos críticos da função? Privilegiavam a relação existente entre a monotonia de uma função e o sinal da sua função derivada?

Ficha VI — A primeira parte da ficha contemplava actividades com situações problemáticas do mundo real envolvendo as noções de velocidade média e de velocidade instantânea. Pedia-se a determinação do sinal do declive das rectas tangentes à curva representativa de uma função quadrática em vários pontos (a função quadrática traduzia uma situação real — trajectória descrita por uma bola). Com estas actividades pretendia compreender-se se a situação real tinha alguma influência nas respostas dadas pelos alunos. Os aspectos formais das questões eram privilegiados em detrimento das intuições?

Na quarta actividade era dado um gráfico que relacionava a velocidade com o tempo. Os alunos deviam construir gráficos plausíveis do espaço/tempo e da aceleração/tempo. Com esta actividade pretendia perceber-se como é que os alunos relacionavam diversas ideias matemáticas (os conceitos de declive, derivada, velocidade e aceleração). Esta actividade foi extraída das Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar (N.C.T.M, 1991).

Com a quinta e sexta actividade pretendia-se que os alunos determinassem, graficamente, as derivadas de duas funções em pontos de descontinuidade. Pretendia perceber-se como é que os alunos traçavam as sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente à curva num ponto de descontinuidade da função para, em seguida, indicarem a derivada da função nos pontos pedidos.

Na última actividade pedia-se a derivada de uma função num ponto com derivada infinita. Com esta actividade pretendia-se que os alunos concluíssem que a derivada da função no ponto considerado era mais infinito uma vez que as duas semi-tangentes à curva representativa da função nesse ponto estavam na continuidade uma da outra e tinham ambas declive mais infinito.

Ficha VII — Pedia-se o valor lógico da algumas afirmações que relacionavam: continuidade de uma função num ponto com diferenciabilidade da função nesse ponto; extremos relativos da função com pontos de derivada nula; pontos de inflexão com pontos em que a segunda derivada era nula. Esta actividade pretendia compreender as conexões que os alunos estabeleciam entre os vários conceitos envolvidos.

Ficha VIII — Na primeira actividade pedia-se aos alunos que descrevessem o modo como explicariam a um colega a noção de derivada de uma função num ponto. Acrescentava-se que não se aceitava uma resposta do tipo: é o limite da razão incremental. Pretendia compreender-se qual o conceito de derivada de uma função num ponto construído e evocado pelos alunos.

Uma segunda actividade tentava levar os alunos a reflectir na continuidade de uma função e na continuidade da sua função derivada. Esta actividade foi acrescentada no decorrer da experiência de ensino por se ter verificado que alguns alunos, por vezes, não pareciam estabelecer as conexões necessárias entre essas duas situações.

As restantes actividades desta ficha, também acrescentadas no decurso da intervenção, eram semelhantes às apresentadas na ficha VI. Faltava-lhes a situação real. Pretendia comparar-se os processos utilizados pelos alunos no desenvolvimento destas actividades com os utilizados para levar a cabo tarefas semelhantes propostas na ficha VI e verificar se a situação real influenciava, nestes casos, o desenvolvimento das actividades matemáticas.

Ficha IX — Esta ficha dedicada ao estudo do sentido de variação de uma função, já tinha sido utilizada com outros alunos, em anos anteriores, quer pela professora quer pela investigadora. Com esta ficha pretendia-se que os alunos, a partir da observação gráfica de algumas funções e das respectivas funções derivadas, relacionassem o sinal da função derivada com a monotonia da função.

Ficha X — Esta ficha foi elaborada no decurso da experiência de ensino. Ao longo da intervenção foi-nos dado verificar que alguns alunos não tinham ideias muito claras da noção de continuidade de uma função num ponto pelo que a primeira actividade desta ficha pretendeu ajudar os alunos a construir esse conceito através do estudo da continuidade de algumas funções representadas graficamente.

Numa segunda actividade pedia-se a indicação, por observação gráfica, do sinal da derivada de duas funções em alguns pontos. Com esta actividade, pretendia compreender-se como é que os alunos interpretavam o conceito de derivada de uma função num ponto, no final de uma intervenção didáctica que tinha privilegiado uma interpretação gráfica das questões.

A terceira actividade era dedicada à resolução de um problema de aplicação do estudo de derivadas — um problema clássico de extremos relativos de uma função (Determinação da medida do lado de um quadrado de forma que a área fosse mínima).

A quarta actividade era semelhante à primeira actividade da ficha IV. Eram apresentados recipientes de diferentes formas a encher a partir de uma torneira de caudal constante e gráficos representativos do enchimento desses recipientes. Os alunos deviam atribuir a cada recipiente o respectivo gráfico de enchimento. Com esta actividade pretendia compreender-se que noções de variação e de variação na variação tinham sido construídas pelos alunos.

4.3. O programa *A Graphic Approach to the Calculus*

As aulas dedicadas à realização das actividades com recurso a ferramentas computacionais tiveram lugar na antiga sala do Projecto Minerva da escola. Era nesta sala que, no ano em que decorreu esta investigação, eram leccionadas as aulas da disciplina de Introdução às Tecnologias de Informação, encontrando-se, por isso, bem equipada com material informático. Dispunha de oito computadores, todos eles com disco rígido e de duas impressoras. O *software* utilizado nesta investigação foi o programa *A Graphic Approach to the Calculus*. Este programa era já familiar quer à professora quer à investigadora. Em anos lectivos anteriores, tinham elaborado em conjunto fichas de trabalho para serem resolvidas, recorrendo a esse programa, pelos seus alunos do 10º e 11º Anos, aquando do estudo das funções. Recorreu-se a este programa por se ter considerado um programa de fácil utilização e, além disso, respondia aos objectivos desta investigação.

O *software* computacional, *A Graphic Approach to the Calculus* cria um ambiente que permite que o aluno possa manipular exemplos e, se possível, contra-exemplos de um conceito específico da Matemática (Tall, 1989). Um dos Organizadores Genéricos que foi utilizado neste estudo é um *Drawing chords through fixed point* que permite obter a derivada de uma função num ponto através do traçado das sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente e a tabela dos respectivos declives. Outro Organizador Genérico utilizado foi um *gradient curve* que permite obter o gráfico da função derivada sobreposto ao gráfico da função, visualizando-se as sucessivas tangentes à curva representativa da função em vários pontos. Este *software* foi usado para permitir que os alunos explorassem e manipulassem exemplos e contra-exemplos do conceito de derivada a partir da sua interpretação gráfica, numérica e simbólica no sentido de desenvolver integralmente o conceito de derivada.

A Graphic Approach to the Calculus é um programa de computador com uma abordagem do Cálculo desenvolvida por Tall (1986c, 1990) que reconhece os obstáculos conceptuais de alguns conceitos específicos da Matemática e propõe uma sequência de aprendizagem construída sobre a visualização de gráficos. Usa as possibilidades gráficas e dinâmicas do computador para dar uma base cognitiva das noções de derivada e integral no ensino secundário, proporcionando posteriores formalizações desses conceitos. Este programa permite que o utilizador manipule exemplos (e, quando possível, contra-exemplos) que lhe proporcionem a construção de um determinado conceito. Há uma primeira fase de familiarização e negociação de significados através de um diálogo professor/alunos. Uma segunda fase é de trabalho de investigação autónomo feito pelos alunos com a ajuda do programa e das actividades propostas. A última fase, de discussão e avaliação, estabelece o ponto da situação e tenta verificar se os conceitos imagens construídos pelos alunos são compatíveis com os da comunidade dos matemáticos.

O aspecto flexível, dinâmico e multi-representacional do programa *A Graphic Approach to the Calculus* cria um ambiente poderoso para trabalhar com gráficos de funções. Permite usar o poder complementar da visualização para dar uma percepção global de alguns conceitos matemáticos.

O programa está preparado, especificamente, para introduzir os conceitos de derivada, integral e equação diferencial. A opção do menu ***Gradient*** permite sobrepor ao gráfico de uma função f uma representação visual das várias rectas secantes passando pelos pontos (x, f(x)) e (x+h, f(x+h)) à medida que **h** se vai tornando cada vez menor. Vejamos, por exemplo o que se passa quando se pretende calcular a derivada da função $f(x) = x^2$, no ponto de abcissa 1. Depois de, no menu principal, se escolher a opção ***4. Gradient (Differentiation)***, podemos introduzir a expressão analítica da função que queremos estudar (neste caso x^2). Depois de se escolherem os valores mínimo e máximo para os eixos coordenados, podemos visualizar o gráfico da função f (figura 4.1).

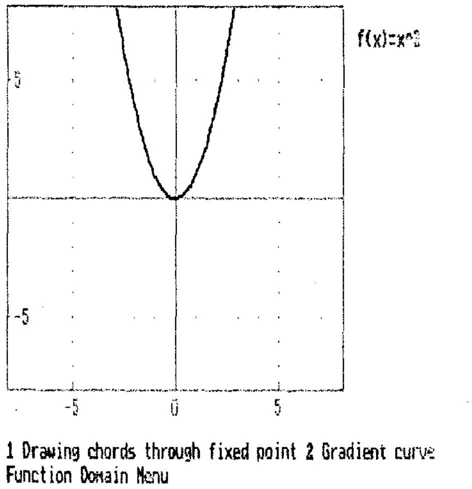
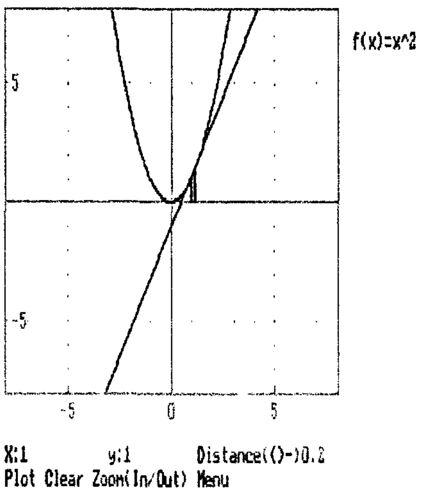


Fig. 4.1 - Gráfico da função $f(x) = x^2$ e menus do programa

Podemos, então, seleccionar a opção *1. **Drawing chords through fixed point***, para visualizarmos as sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente à curva no ponto, ao mesmo tempo que uma tabela vai apresentando os declives das sucessivas rectas secantes exibidas no ecrã do computador. Se pretendermos determinar a derivada da função no ponto de abcissa 1, devemos indicar x = 1 (ponto fixo) e a distância a que o ponto móvel se encontra desse ponto fixo. A indicação de um valor positivo ou de um valor negativo para *Distance* indica ao programa se o ponto móvel se encontra à direita ou à esquerda do ponto fixo obtendo-se, respectivamente, a derivada lateral direita ou a derivada lateral esquerda da função no ponto de abcissa 1. Suponhamos, então, que pretendemos determinar a derivada lateral direita da função no ponto de abcissa 1. Depois de carregarmos na tecla D (*Distance*) indicamos um valor positivo. A primeira recta secante a ser traçada é a recta definida pelo ponto fixo e pelo ponto móvel à sua direita. Ao pressionar a tecla P (*Plot*), podemos visualizar as sucessivas rectas secantes que passam pelo ponto fixo e por cada um dos pontos originados pelas sucessivas posições do ponto móvel sobre a curva, quando este se aproxima do ponto de abcissa 1 (figura 4.2).



Wait NORMAL Quick

Δx	slope
2	4
1.8	3.8
1.6	3.6
1.4	3.4
1.2	3.2
1	3
0.8	2.8
0.6	2.6
0.4	2.4
0.2	2.2

Fig. 4.2 - Gráfico da função $f(x) = x^2$ e de uma recta secante passando pelo ponto de abcissa 1 e por outro ponto à sua direita a uma distância de 0,2.

É ainda exibida uma tabela dos incrementos de x e dos valores numéricos dos declives das diferentes rectas secantes. Continuando a pressionar a tecla P (*Plot*), podemos visualizar as rectas secantes a aproximarem-se cada vez mais da recta tangente à curva no ponto (figuras 4.2 e 4.3).

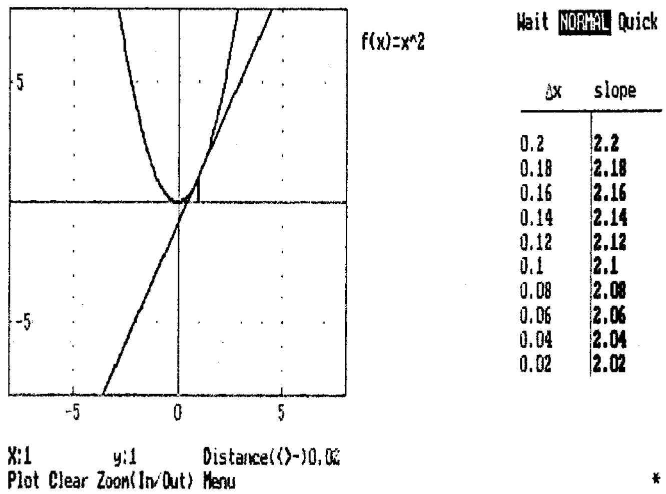


Fig. 4.3 - Gráfico da função $f(x) = x^2$ e de uma recta secante passando pelo ponto de abcissa 1 e por outro ponto à sua direita a uma distância de 0,02.

Continuando a pressionar a tecla P (*Plot*), podemos observar que os valores dos declives exibidos na tabela começam a ter um valor constante que nos indica o declive da recta tangente à curva no ponto e, assim, está determinada a derivada lateral direita da função no ponto de abcissa 1 (figura 4.4).

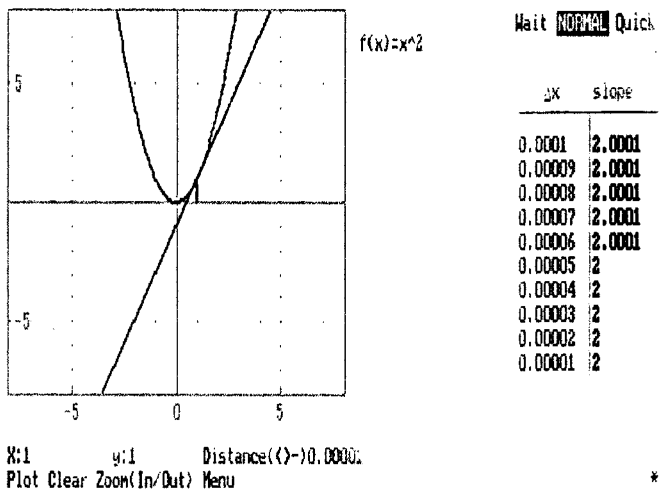


Fig. 4.4 - Gráfico da função $f(x) = x^2$ e de uma recta secante passando pelo ponto de abcissa 1 e por outro ponto à sua direita a uma distância de 0,00001.

Para determinar a derivada lateral esquerda da função no mesmo ponto bastava, em seguida, atribuir um valor negativo a D (*Distance*).

O programa, através da opção ***2. Gradient curve*** permite ainda obter a derivada da função em vários pontos. O número de pontos considerado depende do valor que o utilizador atribuir a **h** (figuras 4.5 e 4.6)

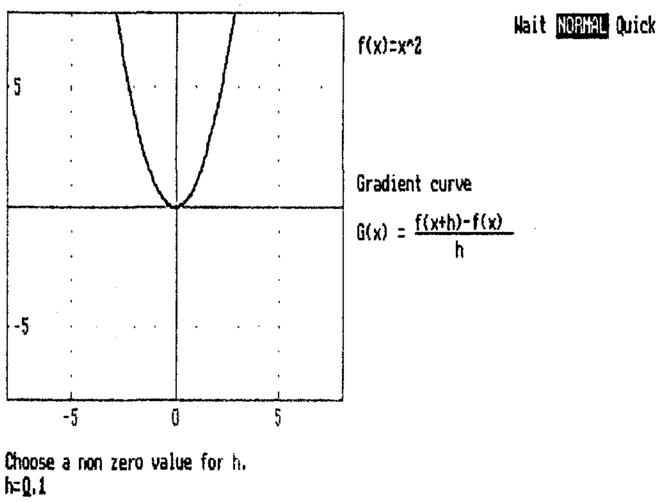


Fig. 4.5 - Gráfico da função $f(x) = x^2$ e menus da opção *Gradient curve*

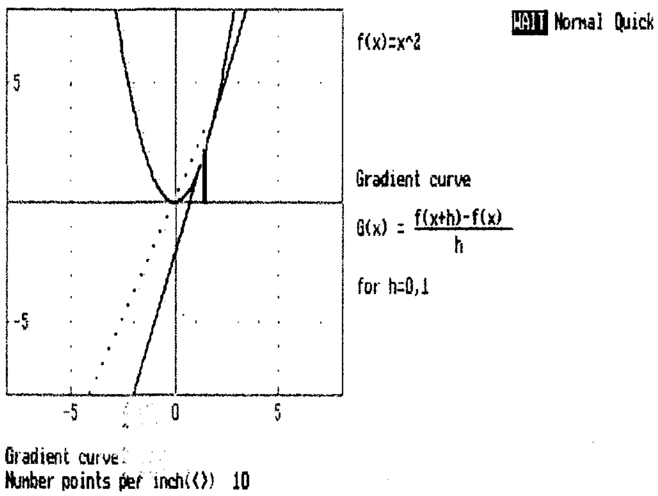


Fig. 4.6 - Gráfico da função $f(x) = x^2$, sobreposição de uma tangente à curva e indicação de alguns pontos pertencentes ao gráfico da função derivada.

Obtém-se, por fim, o gráfico da função derivada sobreposto ao gráfico da função (figura 4.7).

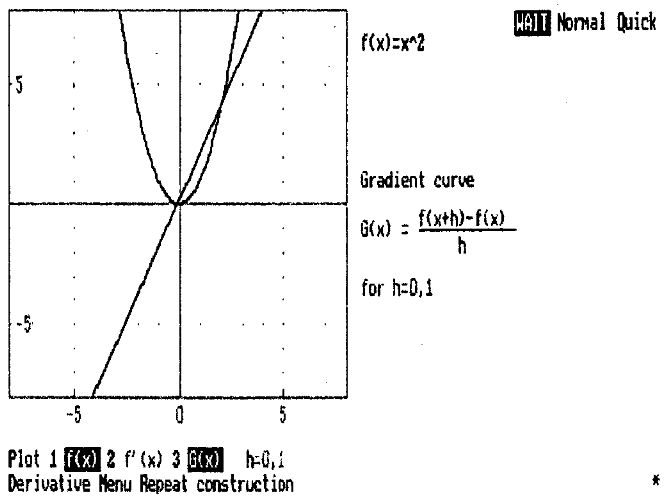


Fig. 4.7 - Sobreposição dos gráficos da função f(x) = x^2e da sua função derivada.

Com a utilização deste programa pretendia-se que os alunos formassem um conceito geométrico de derivada de uma função num ponto, associanda a derivada de uma função num ponto ao declive da recta tangente à curva nesse ponto.

Acreditamos numa abordagem experimental da Matemática e na organização da construção do conhecimento à volta das actividades dos alunos. É necessário mudar o ensino tradicional baseado na predominância de uma abordagem algorítmica. O programa *A Graphic Approach to the Calculus*, acompanhado de actividades adequadas, pode criar um ambiente de sala de aula que propicia esta desejada mudança.

4.4. Questões que se evidenciaram na intervenção didáctica

Nos quatro capítulos que se seguem, dedicados à análise dos dados recolhidos ao longo desta intervenção didáctica, descreve-se o modo como os alunos desenvolveram as actividades. Parece-nos, no entanto, pertinente analisar algumas questões que, não fazendo directamente parte dos objectivos do estudo, tiveram a sua influência no decorrer da experiência. Assim, nos pontos que se seguem, focaremos a nossa atenção no modo como os alunos utilizaram o computador e o programa *A Graphic Approach to the Calculus*, em algumas atitudes dos alunos, e nas opções que podiam ter sido tomadas.

4.4.1. Utilização do computador

Alguns alunos demoraram um certo tempo até se sentirem à vontade para trabalhar com o computador, uma vez que não tinham tido, até essa altura, qualquer tipo de experiência na sua utilização. A Cristiana, por exemplo, foi uma das alunas que, no início da intervenção didáctica, manifestou menos empatia com a utilização do computador. Dizia ela: "tenho tido algumas dificuldades em trabalhar com o computador. Às vezes não sei o que é que está a acontecer de errado. Estava a escrever **o** (letra o) em vez de 0 (algarismo zero) e aquilo nunca mais funcionava e eu não sabia qual era a razão. Estas pequenas coisas são chatas". Esta aluna, que sempre fora bem sucedida na disciplina de Matemática, sentia-se um pouco confusa neste contexto em que se privilegiava a observação e interpretação gráfica, em detrimento dos cálculos complexos ligados ao estudo das derivadas das funções.

Crist: Eu cá não me oriento no computador sem fazer cálculos no papel...

Outros alunos, e de uma maneira particular, aqueles que manifestavam bastante gosto no trabalho desenvolvido recorrendo a ferramentas computacionais, por vezes, evidenciaram uma certa dependência da sua utilização.

4.4.1.1. Utilização do software

Todos os intervenientes nesta experiência de ensino consideraram positiva a intervenção didáctica realizada e consideraram que o programa utilizado se tornou uma ferramenta acessível e poderosa no estudo das derivadas de funções. No entanto, uma reflexão sobre o modo como os alunos utilizaram, por vezes, o programa levantou algumas questões que podem ter influenciado a intervenção didáctica e que, ainda que resumidamente passamos a apresentar.

No início da intervenção didáctica, alguns alunos tiveram dificuldade em perceber a necessidade de atribuir um valor para uma primeira localização do ponto móvel sobre a curva em relação ao ponto fixo. O facto de atribuir um valor negativo para uma distância, perante uma estrutura conceptual adquirida em anos anteriores de que uma distância não pode ser representada por um número negativo gerou, no início, alguns conflitos e foi alvo de algumas discussões entre alunos e professora ou investigadora.

L. Carlos:Posso pôr uma distância negativa?

Inv: Tem que atribuir o valor -2 para obter o ponto móvel à esquerda do ponto fixo.

Luís: É que uma distância nunca é negativa... o sinal é então só para dizer que é por valores inferiores?

Alguns alunos, ficavam fascinados com aquilo que viam "mexer" no ecrã do computador o que, em relação à determinação da derivada de uma função num ponto, pode ter originado uma desconexão entre o que os alunos visualizavam no computador e a determinação do limite de uma razão incremental.

Ainda que os alunos tenham determinado com a ajuda do computador a derivada de várias funções em vários pontos, visualizando as sucessivas rectas secantes aproximando-se no limite da recta tangente à curva, muitos deles não conseguiram fazer a transferência desse conhecimento quando, mais tarde, precisaram de, eles próprios, traçarem com papel e lápis as rectas secantes para determinarem, por exemplo, as derivadas laterais de funções em pontos de descontinuidade. Não queremos, no entanto, deixar de sublinhar que a maior parte dos pontos em que os alunos determinaram, com a ajuda do computador, se existia ou não derivada da função, não eram pontos de descontinuidade. O *software* não permitia o estudo de todos os tipos de funções. Não era possível introduzir, por exemplo, a maior parte das funções definidas por ramos, o que pode ter originado as dificuldades manifestadas pelos alunos quando se viram confrontados com a necessidade de determinar a derivada de uma função num ponto de descontinuidade. Queremos ainda acrescentar que nas aulas tradicionais, os alunos não são, normalmente, confrontados com este tipo de situações. Tarefas mais comuns nessas aulas são aquelas em que os alunos devem concluir se existe ou não derivada de uma função num determinado ponto através de uma estratégia puramente analítica da utilização da definição de derivada de uma função num ponto que, de uma maneira geral, obriga a complexos cálculos de determinação de limites e ao levantamento de indeterminações e em que os alunos não têm, a maior parte das vezes, qualquer tipo de interpretação gráfica dos valores a que conseguem chegar depois de terem concluído fastidiosos cálculos.

Nem todos os alunos participantes neste estudo fizeram as conexões necessárias entre o gráfico de uma função e o gráfico da sua função derivada, sobrepostos no ecrã do computador, uma vez que, nem sempre utilizaram este último gráfico para, por simples leitura, determinarem a derivada da função em determinados pontos.

4.4.2. Atitudes dos alunos

Os alunos participantes nesta experiência de ensino empenharam-se na realização das actividades que lhes foram propostas. A confirmá-lo estão não só os comentários da investigadora no seu diário de investigação como também as opiniões dos alunos e da professora que se apresentam no capítulo 8.

Os alunos desenvolveram as actividades manifestando-se sempre bem dispostos. Podia ler-se no diário da investigadora: "Os alunos trabalham, riem, brincam... Dá gosto ver as suas caras sorridentes. Não estão, certamente, a fazer um trabalho que os aborrece".

Os alunos eram persistentes no trabalho a realizar. Com frequência, aconteceram ao longo da intervenção situações do tipo:

Inv: Acabam na próxima aula.

Crist: Mas estamos aqui com uma dúvida...

Inv: Vamos lá então ver.

Paulo: A (A) não pode ser porque não é uma função ímpar.

Inv: Exacto. Esta não é ímpar.

Paulo: A (D) também não porque f'(1) não é zero.

Inv: Sim. Mas porque é que a (B) não pode ser?

Paulo: Porque esta aqui acho que não é ímpar.

Inv: Porque é que não é ímpar? Como é que se vê se é ímpar ou não?

Paulo: f'(-x) = -f(x)

Inv: Exacto. E olhando para o gráfico, como é que se vê?

Paulo: Se é par é paralela ao eixo dos...yy.

Inv: Se é par, o gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy. Quer dizer, se dobrarmos a folha que tem o gráfico pelo eixo dos yy...

Paulo: Fica igual.

Inv: Sobrepõe. E ser ímpar, o que é que isso quer dizer? [O Paulo não consegue responder]. Quer dizer que o gráfico é simético em relação à origem do referencial.

Paulo: Sim. sim.

Inv: Portanto a resposta fica...

Paulo: A (B).

Ao longo da intervenção didáctica, algumas situações evidenciaram a atitude de alerta manifestada pelos alunos quando reflectiam sobre as situações e relacionavam as actividades propostas nas aulas extra-lectivas com recurso a ferramentas computacionais com as actividades desenvolvidas na sala habitual.

Inv: Ainda nesta mesma ficha, no problema 2., diziam-lhe que a derivada de uma função g era $3x^2-3$. E como é que a partir disto a Cristiana pode afirmar que a expressão analítica de g é x^3-3x?

Cris: Então... é só andar para trás.

Inv: Está bem, é andar para trás... mas como é que sabe que é exactamente x^3-3x, e não outra função da família $x^3-3x + k$?

Cris: Ah! Pois é, não reparei nesse pormenor. Ela pode estar ou não deslocada.

Inv: Exactamente.

Cris: Na aula também já falámos sobre este assunto.

O empenho e atitude positiva manifestado pelos alunos participantes neste estudo, por vezes extravasou a própria sala de aula.

Inv: Em relação à ficha VI, o que a Cristiana encontrou na questão 2.1. foi a aceleração média.

Cris: Sim, já sei como se faz. Também já falei com a professora de Física sobre este assunto e já sei como se faz.

No decorrer da intervenção didáctica, alguns alunos mudaram de atitude face à utilização de ferramentas computacionais. Vejamos a atitude da Cristiana manifestada no excerto:

Inv: Daquilo que observei na última aula, parece-me que o Paulo procura ver e "ler" no computador, enquanto que a Cristiana se preocupa mais com os cálculos...

Crist: Mas hoje mudamos. Ao princípio era assim...

Inv: A Cristiana estava um pouco desconfiada do computador...

Crist: Não. Sabe, é que eu estou mais habituada a fazer o cálculo, e assim torna-se mais rápido do que no computador. Com o computador tenho que estar a pensar qual é a tecla...tenho que estar a consultar as instruções... como não costumo trabalhar com o computador... Eu não gosto muito de trabalhar com o computador.

Inv: Então acha que o computador torna o estudo mais lento?

Crist: Não. É mais rápido para quem sabe logo.

Paulo: Exactamente. Quem sabe trabalhar com o computador...

Crist: Agora andar aqui à procura das instruções... e depois não dá bem porque me esqueci disto ou daquilo... Queria escrever zero e carregava na letra o e assim não saía daqui... Claro que isto também precisa é de prática. Ao princípio não estava a perceber o que estava a acontecer. Claro que eu sei que isto precisa é de prática.

Inv: O que é que o Paulo acha?

Paulo: Penso a mesma coisa. Depois de se adquirir um pouco de prática é muito mais rápido.

Inv: Bem, penso que não estão a pensar que estas aulas estão a ser dadas com recurso ao computador para se dar a matéria mais depressa... A ideia não é essa.

Crist: Não. É para percebermos melhor.

Inv: Exactamente. Uma coisa é estarem a calcular o limite da razão incremental, outra é visualizarem as várias secantes e os respectivos declives... Muitas vezes, quando estão a calcular o limite da razão incremental não sabem o que estão a fazer...

Paulo: Por vezes estamos apenas a decorar regras...

Crist: Claro.

No início da intervenção, os alunos sentiam-se muito dependentes da professora e da investigadora. Solicitavam a sua presença à mínima dificuldade encontrada. Dizia a Cristiana:

"Nós ainda não percebemos o que temos que fazer", e mais adiante: "Eu ainda não sei fazer bem isto. *Stora*, não se importa de chegar aqui? Agora já não sei como é que se faz". Pouco a pouco, os alunos tornaram-se mais autónomos, embora tenha permanecido o hábito de chamarem a investigadora ou a professora para ultrapassarem dificuldades, principalmente quando os dois elementos do grupo não chegavam a um acordo.

De uma maneira geral, os alunos não gostavam de justificar as respostas, por lhes parecerem demasiado evidentes ou por sentirem alguma dificuldade em passar a escrito o raciocínio utilizado. Dizia o Filipe: "...Porque o declive... porque a derivada... eu não gosto de escrever... os Engenheiros não sabem escrever".

> Inv: Vocês ali não justificaram.
>
> Filipe: Por palavras?
>
> ...
>
> Inv: Luís Filipe, o seu problema, muitas vezes, é não justificar as respostas.
>
> L. Filipe: Sim. Em termos práticos não tenho tido grandes dificuldades em resolver estas fichas e depois acho que não é necessário justificar aquilo que me parece evidente.

A insistência conjunta da investigadora e da professora para a necessidade e importância das justificações levou-os a empenharem-se cada vez mais nessa tarefa.

A utilização do teclado do computador não levantou qualquer problema entre os elementos dos grupos. Embora alguns alunos o tenham utilizado com mais frequência, esse facto não gerou conflito entre os elementos dos grupos.

4.4.3. Opções que poderiam ter sido tomadas

Como em qualquer outra investigação, no desenvolvimento desta experiência de ensino, tomaram-se determinadas opções. Optou-se, por exemplo, por utilizar dois Organizadores Genéricos do programa *A Graphic Approach to the Calculus — Drawing chords through fixed point* que permite obter a derivada de uma função num ponto através do traçado das sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente e a tabela dos respectivos declives e um *gradient curve program* que permite obter o gráfico da função derivada sobreposto ao gráfico da função, visualizando-se as sucessivas tangentes à curva representativa da função em vários pontos. Conceberam-se fichas de actividades para serem desenvolvidas recorrendo a essa ferramenta. Outras opções, certamente não menos válidas, poderiam ter sido tomadas para implementar esta intervenção.

4.4.3.1. *Opção do programa não explorada para a construção do conceito de derivada*

A intervenção didáctica implementada tinha como principal objectivo compreender os processos desenvolvidos pelos alunos no estudo das derivadas utilizando ferramentas computacionais. Usou-se uma opção do programa *A Graphic Approach to the Calculus* que envolve a noção matemática de derivada como um processo limite das rectas secantes aproximando-se da recta tangente. Podia ter sido considerada uma outra opção do programa que tem por base o quadro de referência da linearidade local. Sob um aumento uniforme uma função diferenciável parece ser localmente recta. A introdução da diferenciação pelos dois processos apela a imagens visuais. Optámos pelo quadro de referência do limite para ajudar os alunos a construir o conceito de derivada por nos parecer ser potencialmente mais acessível aos alunos do que a abordagem através da linearidade local. O primeiro quadro de referência usa a simples ideia de uma recta secante aproximando-se da recta tangente. O quadro de referência da linearidade local é relativamente mais complicada (Fiske, 1994). Além disso, no estudo de Fiske, foi rejeitada a hipótese de que os alunos a quem se proporcionou uma abordagem do conceito de derivada através do processo da linearidade local alcançassem uma compreensão mais completa desse conceito do que os alunos do grupo da secante-tangente.

4.4.3.2. *Actividades propostas*

Uma reflexão sobre a globalidade das actividades propostas no decorrer desta intervenção didáctica evidenciaram que poderiam ter sido tomadas outras opções.

Podiam ter sido contempladas mais situações problemáticas do mundo real.

O programa com que os alunos trabalharam não permitia o estudo da maior parte das funções definidas por ramos, assim, podia ter sido dada menos ênfase a actividades envolvendo a determinação de derivadas de funções em pontos de descontinuidade.

As actividades em que se pretendia que os alunos indicassem, por observação do gráfico da função derivada, a derivada de algumas funções em determinados pontos, nem sempre foram desenvolvidas de acordo com o pedido. Alguns alunos, mesmo aqueles que considerámos terem manifestado privilegiar estratégias de resolução geométricas das questões, enveredaram, por vezes, pela utilização de uma estratégia analítica na resolução destas questões. Esta opção pode ter sido originada pela conjugação de dois factores: as funções envolvidas eram representadas por expressões analíticas de fácil derivação através das regras; a leitura do valor da derivada, a partir do gráfico da função derivada, nem sempre se revelou imediata. Dizia o Luís Filipe: "Se a função é x^2, a função derivada é 2x". E o Luís Carlos:

> L. Carlos: Mas eu quero ver na função derivada quanto vale f'(-2).
>
> Inv: O -2 é este ponto aqui, não é? A imagem vai dar aqui assim, não é?
>
> L. Carlos: Não é o -4?
>
> Inv: Exactamente.
>
> L. Carlos: Mas eu também podia ter substituído em y = 2x, x por -2 e obtinha logo o valor -4.
>
> Inv: Sim, mas nesse caso não estava a calcular, graficamente, o valor da derivada.

A utilização de uma estratégia analítica, nestes casos pode ter sido influenciada pelo tipo de actividade proposta.

Em resumo: A intervenção didáctica que operacionalizou a experiência de ensino levada a cabo neste estudo tem por base um modelo da hipótese teórica de que o estudo dos conceitos de Análise privilegiando uma abordagem gráfica, com recurso a ferramentas computacionais, pode elevar a compreensão desses conceitos pelos alunos.

Esta intervenção didáctica envolveu alguns dos alunos de duas turmas de 12º Ano de escolaridade, de uma Escola Secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo de 1994/95. Ocupou um total de trinta e seis aulas (vinte aulas em horário extra-lectivo com recurso a ferramentas computacionais e dezasseis aulas na sala habitual) entre os meses de Março a Junho.

Os conceitos envolvidos no estudo das derivadas foram abordados de uma forma diferente da tradicional:

- Privilegiou-se uma abordagem gráfica desses conceitos, em detrimento de uma abordagem mais analítica;
- As actividades propostas foram desenvolvidas em contexto computacional, com recurso ao programa *A Graphic Approach to the Calculus*.
- Todas as actividades propostas foram desenvolvidas em grupo.

A professora da turma considerou que o trabalho desenvolvido na sala de computadores, tinha sido muito importante para alguns alunos, sobretudo para aqueles que faziam muitos exercícios sem pensarem bem naquilo que faziam e "nem sequer tinham coragem para colocar dúvidas". Afirmou que este trabalho tinha ajudado alguns alunos a "não fazerem exercícios por simples rotina", e que o facto de terem de dar uma justificação, tinha permitido não só uma maior interiorização dos conceitos mas também uma maior consciencialização de pequenos pormenores de resolução o que não teria acontecido, certamente, num tipo de metodologia que privilegiasse um trabalho individual em que a meta seria chegar a um resultado correcto.

Os alunos envolveram-se activamente no desenvolvimento das actividades propostas.

As ideias esboçadas neste capítulo irão ser complementadas com os quatro capítulos que se seguem onde se tenta caracterizar de uma forma mais aprofundada os processos desenvolvidos pelos alunos no estudo das derivadas em contextos computacionais.

Capítulo 5

Declive de uma recta

Neste capítulo caracterizam-se os processos desenvolvidos pelos alunos no estudo do declive de uma recta tentando, desse modo, dar resposta à primeira questão desta investigação. A razão que nos leva a fazer esta caracterização antes de dar início ao estudo da derivada de uma função num ponto, objectivo fundamental da investigação, prende-se com o facto do conceito de derivada de uma função ser um conceito que transporta em si uma certa complexidade. Cada conceito avançado é baseado em conceitos mais elementares e não pode ser alcançado sem uma sólida e, por vezes, muito específica compreensão deles. Existem vários conceitos que estão associados ao conceito de derivada e que necessitam ser tomados em consideração, como o conceito de declive e de taxa de variação média e a noção de recta tangente a uma curva (Orton, 1980) para, mais tarde, podermos compreender algumas das dificuldades conceptuais que os alunos manifestam no estudo das derivadas.

O trabalho com gráficos representando situações da vida real é importante no desenvolvimento do conceito de declive e de taxa de variação antes que sejam usadas abordagens mais analíticas. É importante a ideia de pontos sobre uma curva onde a função é crescente, onde é decrescente e onde cresce ou decresce mais rapidamente. É também importante ligar essas considerações com a natureza dos valores numéricos do declive da curva, se é positivo ou negativo, se tem um valor grande ou pequeno.

As representações gráficas de funções têm o potencial de produzir uma compreensão mais rica do que aquela que é alcançada apenas por estudos analíticos.

Parece-nos cada vez mais útil e frutuosa a introdução de um estudo longo e persistente de interpretação de gráficos antes de ser abordada a noção de derivada de uma função num ponto.

Assim, as primeiras actividades a desenvolver nesta intervenção didáctica contemplavam: (a) tarefas que incluíam a determinação do declive de algumas rectas para que os alunos construíssem ou recordassem esse conceito, concluíssem que o declive de uma recta não dependia dos pontos escolhidos sobre essa recta, e que o relacionassem com a monotonia da função que representava; (b) tarefas que incluíam a determinação da taxa de variação média de algumas funções para ajudar os alunos a concluir que a taxa de variação média entre dois pontos de uma curva representa, geometricamente, o declive da recta que contém esses dois pontos; e (c) tarefas que permitissem que os alunos visualizassem a recta tangente ao gráfico de uma função num ponto P como a recta limite das várias rectas secantes que "passavam" por P e por um ponto Q sobre a curva, aproximando-se de P.

A primeira actividade desta experiência de ensino em contexto computacional, foi antecedida por uma aula que decorreu na sala habitual. Esta aula decorreu com base no diálogo estabelecido entre a professora e os alunos. Foram então recordadas as noções de declive de uma recta, de taxa de variação média, de recta tangente a uma curva num ponto e a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto como sendo o declive da recta tangente à curva nesse ponto. Tentando fugir ao estilo de ensino tradicional cuja sequência é, de uma maneira geral, a exposição da matéria nova seguida da resolução de exercícios de aplicação, em que se ensinam as regras e os truques que levam à solução dos vários tipos de exercícios, sem atender aos conceitos, optou-se pela abordagem dos temas de Análise de uma forma intuitiva, recorrendo à visualização, à experimentação, à exploração de ideias e ao raciocínio. Os conceitos foram abordados recorrendo principalmente aos gráficos por se acreditar que a visualização é fundamental na compreensão dos conceitos de Análise e dos conceitos que lhe estão subjacentes.

Estes conceitos eram novos para alguns alunos da turma. Outros alunos, tinham ideias parcelares sobre questões relacionadas com derivação mas exprimiam-nas de forma muito confusa. Demonstravam competência procedimental mas faltava-lhes a compreensão dos conceitos envolvidos. Não conseguiam, por exemplo, relacionar informação analítica com informação gráfica.

O conceito de declive de uma recta foi apresentado como sendo o quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x, a partir da representação gráfica de algumas funções afins. Posteriormente, verificámos que alguns alunos não consideraram elementar o processo de determinar o declive de uma recta. Falavam com um certo à vontade em quociente de incrementos, mas não conseguiam determinar, graficamente, os valores desses incrementos. Por vezes, inverteram os termos da fracção, outras vezes, limitaram-se a determinar o quociente entre as coordenadas de um ponto ou ainda o quociente entre a abcissa de um ponto e a ordenada de um outro ponto diferente.

A análise, interpretação e descrição dos dados que se apresentam neste capítulo incidiram, principalmente, sobre os *episódios de ensino* (Cobb e Steffe, 1983) realizados com três pares de alunos de duas turmas de 12º Ano, com a duração de um tempo lectivo cada, em aulas extra-lectivas e com recurso a ferramentas computacionais. Durante esses episódios os alunos desenvolveram e discutiram as actividades que lhes foram propostas. O *corpus* da análise incluiu também outros dados provenientes de entrevistas não estruturadas a que esses alunos foram sujeitos, das notas e comentários que a investigadora registou no seu diário de investigação e ainda das respostas dadas pelos alunos às fichas de trabalho.

O facto mais marcante que detectámos foi o de que os alunos utilizaram estratégias diferentes, ainda que, por vezes, seja difícil estabelecer bem a fronteira entre os tipos de estratégias utilizadas, na determinação do declive de uma recta, no modo como relacionaram o declive de uma recta com a sua monotonia e, consequentemente, no modo como definiram declive de uma recta.

Assim, estabeleceram-se as categorias que constituem as três secções em que se divide este capítulo:

- Determinação do declive de uma recta
- Relação entre declive e monotonia
- Conceito de declive de uma recta

5.1. Determinação do declive de uma recta

Identificaram-se duas estratégias principais utilizadas pelos alunos no estudo do declive de uma recta — que denominámos de estratégia geométrica e de estratégia analítica. Por vezes, alguns alunos utilizaram estratégias mistas na resolução de algumas questões. Alguns alunos que optaram por uma estratégia no desenvolvimento de uma actividade num determinado contexto, mudaram de estratégia perante um novo contexto.

Estabeleceram-se as categorias que constituem as três subsecções:

- Estratégia geométrica
- Estratégia analítica
- Estratégias mistas

5.1.1. Estratégia geométrica

A maioria dos alunos envolvidos nesta investigação utilizou uma estratégia que denominámos *geométrica* na determinação do declive de uma recta.

Foram considerados nesta categoria os alunos que:

(a) Falaram de declive como um indicador da inclinação da recta, demonstrando possuir alguma imagem mental gráfica na qual aparece a recta com uma determinada posição em relação aos eixos coordenados;

(b) Se referiram ao declive como uma tangente trigonométrica, evidenciando uma concepção de que o declive é uma característica especial do ângulo que a recta forma com o semi-eixo positivo dos xx;

(c) Fizeram referência à relação de dependência entre os incrementos das duas variáveis. De uma maneira geral, referiram o incremento da variável dependente em função da variável independente "quando x aumenta 1, y aumenta 2", "quando x aumenta 2, y diminui 4". Estes incrementos não foram determinados como se se tratasse de números estáticos resultado de uma operação, mas como comprimentos de segmentos de recta associados a um determinado movimento das variáveis.

(d) Desenharam um triângulo rectângulo em que os comprimentos dos catetos coincidiam com os valores absolutos dos incrementos das variáveis e determinaram o quociente entre esses valores.

Assim, estes alunos, na determinação do declive de uma recta, utilizaram elementos próprios da linguagem geométrica sugerindo uma certa complexidade no seu esquema conceptual e uma representação mental do seu significado gráfico. Demonstraram possuir uma componente visual bem desenvolvida. Estes alunos utilizaram os gráficos como o contexto privilegiado de resolução das questões e como argumentação e, além disso, fizeram-no de uma forma dinâmica. A sua terminologia estava imbuída de movimento " o y andou...", "a recta vem...", "diminui", "aumenta" e reforçada por um modo de expressão gestual. Os seus apoios foram gráficos, diagramas, contagens e gestos. De uma maneira geral, estes alunos não partiram das regras, construíram-nas e utilizaram-nas como recurso ou como argumentação. De uma maneira geral, mostraram-se arrojados no desenvolvimento das actividades propostas.

O programa *A Graphic Approach to the Calculus,* utilizado nesta investigação permite que os alunos introduzam a expressão analítica de uma função e visualizem, de imediato, a sua representação gráfica, proporcionando o estabelecimento de conexões entre essas duas formas de representação de uma função. O programa permite ainda a introdução de uma lista de funções pré-definidas, na sua forma analítica. Os alunos podem visualizar a sua representação gráfica através da identificação da função (f_1, f_2, f_3, etc.) sem visualizarem a respectiva expressão analítica.

Para a determinação do declive de algumas rectas (questões 1 e 2 da ficha I), recorreu-se a este segundo tipo de visualização, com o objectivo de levar os alunos à determinação do declive de uma recta e à construção desse conceito a partir de informação gráfica, em vez de responderem às questões que diziam respeito ao declive pela simples leitura do parâmetro **m** de expressões do tipo $y = mx+b$.

Partindo da representação gráfica das funções afins exibidas no ecrã do computador, os alunos utilizaram dois pontos pertencentes a essas rectas (sugeridos nas fichas de actividades ou escolhidos por eles próprios) e determinaram o quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x.

O Luís Carlos e o Filipe sabiam como determinar o declive da recta f_1 (figura 5.1), a partir dos pontos de coordenadas (0, -4) e (5, 6), sugeridos na ficha de trabalho. Contudo, o Luís Carlos preferia considerar o incremento de y correspondente a um incremento unitário nos xx e não via razão para considerar os pontos sugeridos na ficha de trabalho e não outros.

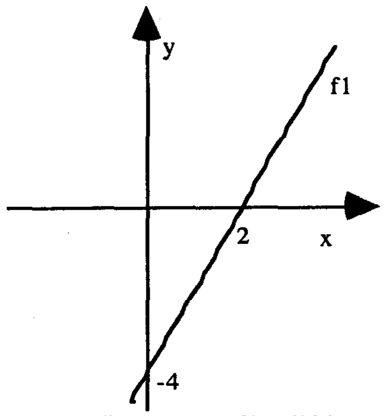


Fig. 5.1 - Gráfico da recta f1 exibido no ecrã do computador

L. Carlos: Mas porquê estes pontos?

Filipe: São pontos em que é fácil ler as coordenadas.

L. Carlos: Mas eu, quando quero determinar o declive de uma recta penso assim: quando x aumenta de uma unidade, quanto é que aumenta o y?

Filipe: Essa maneira de pensar está correcta. De qualquer modo isso é equivalente a pensar assim: temos o ponto A(0, -4) e B(5, 6); então o x aumentou 5 unidades e o y aumentou 10. Então, se o declive é o quociente entre o acréscimo de y sobre o acréscimo de x, vai dar 10/5, ou seja 2.

O Luís Carlos acabou por concordar com a sugestão do Filipe, no entanto, quis mostrar que o seu processo de resolução também era legal e que conduzia ao mesmo resultado. Determinou bem o incremento das variáveis mas, ao determinar o quociente enganou-se e trocou os termos da fracção.

L. Carlos: Sim, já compreendi. Mas vais ver que, como eu faço, vai dar exactamente a mesma coisa ... 1 unidade nos xx vai dar... e então vai dar... não consigo ler bem o valor, mas dá ideia que é 2. Então se para 1 unidade nos xx dá 2 unidades nos yy, o declive é 1/2.

Filipe: Não, Luís. Estás a fazer confusão. O declive não é o acréscimo de x sobre o de y, mas sim o contrário.

Estes alunos mostraram possuir um esquema conceptual de declive que incluía uma relação de dependência entre os incrementos das variáveis. Estes incrementos foram determinados não como números estáticos resultado de uma operação, mas como comprimentos de segmentos de recta associados a um determinado movimento das variáveis. Quando o Filipe referiu que "y aumentou de 10 unidades", considerou que o comprimento do segmento de recta que vai de um dos pontos ao outro é de 10 unidades.

Foi uma constante, ao longo deste estudo, o facto do Luís Carlos se manifestar em termos de: "quando x aumenta de uma unidade, y aumenta de ...", para determinar o declive de uma recta. Não gostava de se sentir obrigado a utilizar os pontos que lhe eram sugeridos na ficha de trabalho. Este seu método próprio e, de certa forma rotineiro, implicou, por vezes, uma dificuldade adicional de leitura de coordenadas de pontos.

Na questão 1 da ficha I pedia-se aos alunos que determinassem, a partir da sua representação gráfica, e considerando dois pares de pontos diferentes, o declive de uma recta. Esta tarefa tinha como objectivo ajudar os alunos a concluir que o declive de uma recta era único, que não dependia dos pontos considerados sobre essa recta.

O Luís Carlos e o Filipe sabiam que o declive de uma recta era único e, assim, começaram por considerar desnecessária uma duplicação da tarefa. Contudo, o Filipe quis aproveitar esta oportunidade para tentar ajudar o Luís Carlos a libertar-se da técnica "quando x aumenta de 1 unidade, y aumenta de ...".

> Filipe: Então, vê lá se consegues agora calcular o declive considerando os outros dois pontos C e D.
>
> L. Carlos: Claro que tem que dar a mesma coisa que para os pontos A e B... mas, vamos lá ver. De 2 para 4,5 vão 2,5 unidades; de 0 para 5 vão 5 unidades, então 5 a dividir por 2,5 dá 2, como era de esperar!...[O Filipe escreveu na ficha $\frac{y - y_0}{x - x_0} = 2$ e o Luís Carlos escreveu m = 2].

Para responderem a esta questão, os alunos basearam-se apenas na representação gráfica da função e, no seu processo de resolução está implícito um certo movimento para efectuar uma contagem "de 2 para 4,5 vão 2,5 unidades". Estes alunos mostraram ainda uma concepção sólida e rica da noção declive de uma recta quando traduziram uma interpretação gráfica de declive em termos de uma formulação mais analítica, $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Em relação à função f_3 (função com declive negativo), o Luís Carlos, ao visualizar o gráfico da função, disse: "agora penso exactamente do mesmo modo. Para um acréscimo de uma unidade nos xx, quanto é que o y decresce? Sim, porque neste caso, a função é decrescente. Claro que aqui o declive tem que dar negativo, uma vez que à medida que x cresce o valor de y decresce". Este aluno continuou a manifestar uma estratégia própria de considerar um incremento unitário nos xx. Evidenciou ainda atribuir um certo movimento às variáveis "à medida que x cresce o valor de y decresce", o que pode estar na base de uma atribuição correcta do sinal do declive.

O Luís Carlos e o Filipe demonstraram, ao longo desta experiência de ensino, ter construído ricas imagens mentais do declive de uma recta a partir das representações gráficas de funções. Desenvolveram as actividades sem necessidade de recordar ou identificar uma fórmula, esforçando-se por visualizar relações matemáticas. Construíram conexões viáveis entre os gráficos das rectas e os seus declives.

Parece-nos possível concluir que a determinação do declive de uma recta a partir da sua representação gráfica tem o potencial de produzir uma compreensão mais elevada daquela que é alcançada apenas por estudos analíticos e procedimentais.

Na questão B.1. da ficha I pedia-se aos alunos que representassem graficamente, utilizando o computador, a função f(x) = 2x + 1 para, em seguida determinarem a taxa de variação média em dois intervalos. Vejamos, por exemplo, como é que o Luís Carlos demonstrou estabelecer uma boa conexão entre as representações analítica e gráfica de uma função.

> L. Carlos: Aqui, pedem-me para traçar o gráfico da recta y = 2x+1. Eu faço isto num instante. O que é que eu faço? Sei que o ponto b..., que era o que eu andava à procura e não conseguia fazer..., pego no ponto b que é 1 e marco o número 1 no eixo dos yy [assinalou sobre o eixo dos yy o ponto de coordenadas (0, 1) (figura 5.2 — I)] e depois digo assim: para 1 x, 2 y [traçou dois segmentos de recta (figura 5.2 — II)] e então obtenho outro ponto. Depois de ter dois pontos consigo traçar uma recta (figura 5.2 — III).

Vejamos a sequência de diagramas que o Luís Carlos traçou, no tampo da mesa, para explicar como é que representava graficamente a função y = 2x+1, sem o apoio do computador.

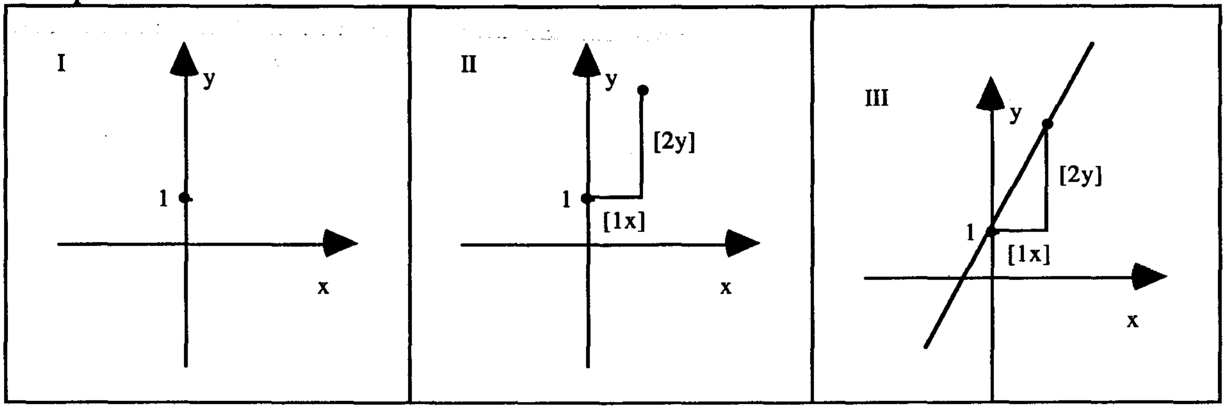


Fig. 5.2 - Sequência de diagramas criada pelo Luís Carlos para representar o gráfico da função y = 2x+1

> Inv: Exactamente.
>
> L. Carlos: Se [o declive] fosse -2 era 1 x, -2 y, mas descia em vez de subir, e traçava... a partir do ponto b, que é onde ele intersecta ... mas eu estava a encontrar agora e não me estava a dar correctamente porque isto parecia-me que estava um bocadinho acima do 1, mas afinal é 1. Eu nem tinha reparado na expressão que tinha que ser mesmo 1. Não tinha reparado que era a fórmula de uma recta.

Uma das características do Luís Carlos era pensar alto enquanto desenvolvia as tarefas. Assim, era mais fácil perceber as conexões que este aluno estabelecia entre os vários conceitos "Se [o declive] fosse -2, era 1 x, -2 y, mas descia em vez de subir". O Luís Carlos tinha uma boa compreensão dos conceitos envolvidos nesta actividade: (a) sabia que o valor de **a** da expressão y = ax + b representava o declive da recta e que **b** era a sua ordenada na origem; (b) sabia o significado geométrico desse declive "para 1 x, 2 y" e da ordenada na origem "pego no ponto b que é 1 e marco o número 1 no eixo dos yy"; (c) sabia que dois pontos eram suficientes para traçar uma recta; e (d) sabia como é que, a partir do gráfico de uma função afim, determinava o declive da recta, mas sabia também fazer a operação inversa, ou seja, a partir da representação analítica de uma função afim, sabia como utilizar o conceito de declive para representar graficamente a função, sem necessidade de recorrer à tabela habitual para encontrar as coordenadas de dois pontos.

Na questão 7 da ficha V, era dado o gráfico da função f (figura 5.3) e pedia-se aos alunos que justificassem qual, de entre cinco gráficos dados, poderia representar, graficamente, a sua função derivada. Como se tratava de uma função definida por ramos, com duas semi-rectas com a mesma origem, os alunos passaram a falar, em cada ramo, de declives em vez de derivadas e utilizaram uma estratégia geométrica na determinação desses declives.

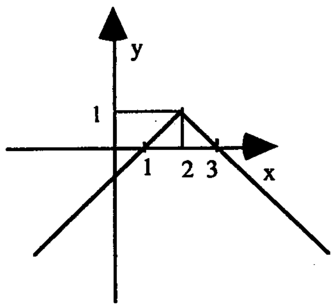


Fig. 5.3 - Gráfico da função da questão 7 - ficha V

Filipe: Qual é o declive da primeira?

L. Carlos: Ah! Queres que eu te diga? Então... para esta aqui... onde intersecta o eixo dos yy?... para 1 x, ele andou 1 y... Então o declive é 1.

Inv: E o da outra?

L. Carlos: Basta prolongar esta semi-recta até encontrar o eixo dos yy [e prolonga] para 1 x, dá -1 y, logo o declive é -1.

Vejamos os esquemas que este aluno fez para determinar os declives de cada uma das semi-rectas (figura 5. 4):

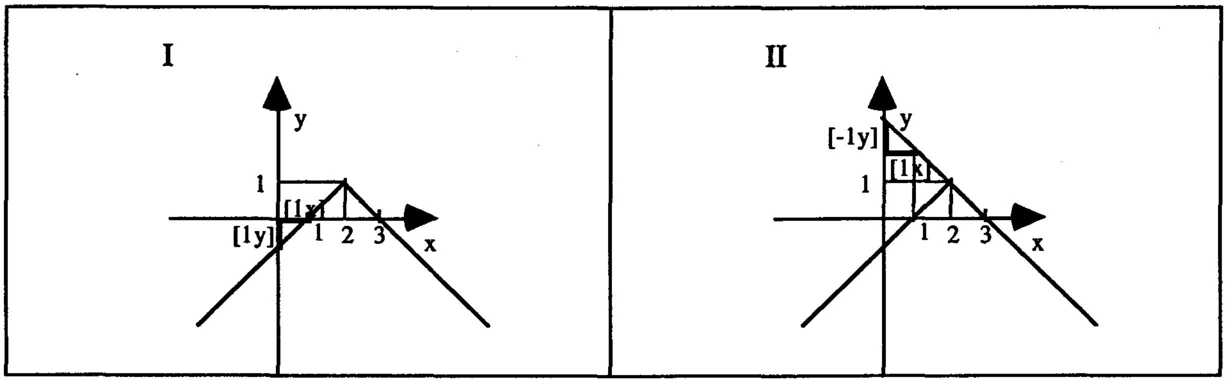


Fig. 5.4 - Esquemas elaborados pelo Luís Carlos para determinar os declives das semi-rectas

O Luís Carlos continuou com a sua estratégia habitual "para 1 x, ele andou...y", considerando o "1 x" um segmento de recta que começava num ponto de abcissa 0 o que, neste caso o obrigou a prolongar a recta (figura 5.4—II).

Este aluno, como já referimos, associou sempre ao declive de uma recta um certo movimento das variáveis. Nas suas explicações utilizou com frequência "para 1 x ele andou...y". Nos casos em que a função era monótona decrescente, este aluno assinalou o facto de se tratar de um incremento de y negativo, não omitindo o sinal menos, ao contrário do que aconteceu com outros alunos, perante funções do mesmo tipo.

Vejamos, por exemplo, como é que o Zé determinou a derivada, no ponto x = 6, da função representada na figura 5.5 (questão 1 da ficha V).

Começou por pensar em termos do declive, ou seja este aluno associou de imediato derivada de uma função num ponto com o declive da recta tangente à curva nesse ponto, que definiu como sendo a tangente trigonométrica do ângulo que a recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx.

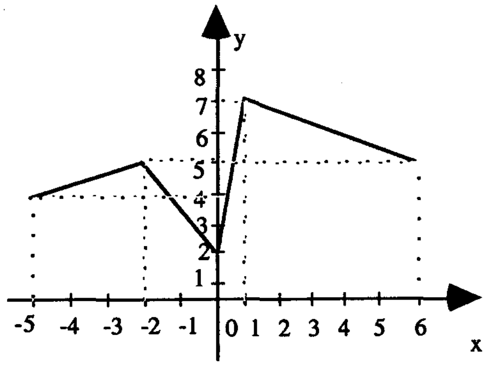


Fig. 5.5 - Gráfico da questão 1 da ficha V

Inv: Qual é a derivada da função no ponto 6?

Zé: Já me lembro de qualquer coisa. Fazia o triângulo rectângulo...

Desenhou um triângulo rectângulo (figura 5.6) e referiu que, para obter a tangente trigonométrica determinava o quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

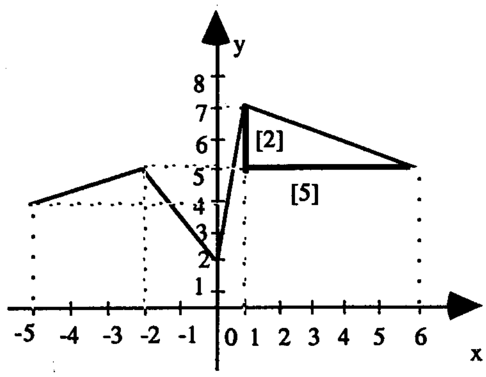


Fig. 5.6 - Esquema feito pelo Zé para determinar a derivada da função no ponto de abcissa 6

Inv: Sim, fazia o triângulo rectângulo. E depois? Como é que calculava a derivada?

Zé: Era o cateto oposto sobre o adjacente, ou melhor [a] tangente [trigonométrica] é igual ao [cateto] oposto sobre o [cateto] adjacente, não é?

Inv: Sim, e depois?

Zé: Dava 2/5.

Inv: 2/5?

Esta estratégia de determinar o declive de uma recta, levou este aluno a uma visão estrita da questão. Assim, parece ter esquecido outras características da função que era preciso ter em conta. Neste caso, o Zé não foi sensível a um resultado positivo do declive de uma recta que representava uma função monótona decrescente. A resposta correcta era -2/5. No entanto, este aluno, perante a interrogação da investigadora, reflectiu no resultado e acabou por responder de uma forma adequada, recorrendo, uma vez mais, a uma estratégia geométrica "prolongar, o eixo das tangentes".

O Zé fez então um esquema semelhante ao da figura 5.7 tendo assinalado sobre o eixo das tangentes o segmento de recta que lhe dava o valor da tangente.

Zé: Ah! Já percebi, [o declive] era negativo. Tinha que prolongar, o eixo das tangentes é este, logo ia dar negativo.

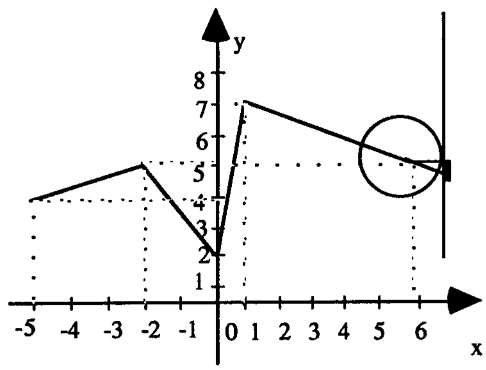


Fig. 5.7- Esquema feito pelo Zé para verificar o sinal da derivada da função no ponto de abcissa 6

Inv: Exactamente. Aliás, nem era preciso pensar nisto... Quanto à monotonia como classifica esta função no intervalo de 1 a 6?

Zé: É decrescente.

Inv: Se é decrescente...

Zé: Pois é. É isso, tem que ter derivada negativa.

A interacção com a investigadora ajudou o aluno a relacionar várias características da situação. A visualização desempenhou um papel importante no seu esquema conceptual sobre declive de uma recta.

5.1.1.1. Rectas paralelas aos eixos

As rectas paralelas ao eixo dos xx constituíram um problema especial para alguns alunos. Alguns deles não as consideravam como representando funções, possivelmente, por estabelecerem uma analogia com o que se passava com as rectas verticais. Contudo, na nossa investigação, concretamente nos alunos que privilegiaram estratégias geométricas no desenvolvimento das actividades, não identificámos esse tipo de concepção. Quando se pediu a esses alunos que indicassem o declive de rectas paralelas ao eixo dos xx, (questão 4 da ficha I), estes ou traçaram um gráfico de uma função constante, ou fizeram um movimento horizontal da esquerda para a direita com a caneta como se estivessem a traçar uma recta horizontal. Contudo, as justificações apresentadas pelos alunos para atribuir declive nulo a esse tipo de rectas, revelaram que estes utilizaram estratégias diferentes na determinação desses declives. Alguns alunos justificaram que o declive era zero porque "o y nunca aumenta nada. Então zero a dividir por qualquer coisa dá zero", privilegiando assim, uma vez mais, uma estratégia geométrica na determinação do declive de uma recta.

> L. Carlos: O declive de uma recta paralela ao eixo dos xx é zero. E é muito fácil de explicar o que eu estou a afirmar. Basta pensar que qualquer que seja o aumento do x [faz um gesto com a mão como se traçasse uma recta horizontal], como o y é constante, o y nunca aumenta nada. Então zero a dividir por qualquer coisa dá zero.

O Luís Carlos mostrou ter raciocinado em termos gráficos, ou seja, ele imaginou uma recta horizontal, e atribuiu aos pontos dessa recta uma ordenada constante pelo que concluiu que o incremento de y era nulo, o que implicava um declive nulo da recta. Na sua resposta não evidenciou qualquer necessidade de pensar em termos de uma representação analítica de uma função constante.

Em relação à mesma questão, o Luís Filipe respondeu de imediato que o seu declive era 0, parecendo ter imaginado uma recta horizontal, logo com um incremento de y nulo. Contudo, recorreu ao gráfico de uma função constante, $y = 2$, para dar uma explicação ao colega de grupo. O Luís Filipe fez a tradução da representação gráfica (imagem de uma recta horizontal) para a representação analítica y = 2 para obter, recorrendo ao computador, a sua representação gráfica.

> L. Filipe: Zé, estás a ver, o valor de y é igual, quer consideremos este ponto ou este [aponta dois pontos sobre a recta y = 2 que tinha representado no ecrã do computador]. Logo, ao calcular $y_2 - y_1$ vamos obter o valor zero. Assim, o declive de uma recta paralela ao eixo dos xx tem que ser zero.

O Zé que trabalhava em grupo com o Luís Filipe manifestou, no início desta experiência de ensino, uma certa dificuldade na interpretação de gráficos. O Luís Filipe, um aluno que privilegiou ao longo desta intervenção uma abordagem geométrica no desenvolvimento das actividades utilizou, na sua explicação, argumentos gráficos e analíticos. A regra $y_2 - y_1$ aparece no final da acção como processo de argumentação, mas com um suporte gráfico. O Luís Filipe mostrou ter estabelecido uma rica conexão entre um raciocínio que tem por base a visualização e um raciocínio mais analítico, na determinação do declive de uma recta. Assim, este aluno, começou por fazer apelo a uma função na forma analítica y = 2, traçou o seu gráfico e tentou mostrar ao colega porque é que o declive desta recta era zero.

Na questão 5 da ficha I pedia-se aos alunos que indicassem o declive de uma recta paralela ao eixo dos yy. Esta questão causou uma certa perturbação aos alunos, que podem ter recordado o que tinham aprendido sobre a tangente de um ângulo de 90° aquando do estudo das funções trigonométricas. Assim, alguns deles, afirmaram que não estava definido ou que não existia o declive dessas rectas, manifestando alguma relutância em falar de declives infinitos. Contudo, outros alunos responderam, com convicção, que essas rectas tinham declive infinito.

> L. Carlos: *E se a recta fosse paralela ao eixo dos yy?...* Neste caso, não existe declive, ou melhor não está definido.
>
> [O Filipe que se mantinha calado há algum tempo, intervém]:
>
> Filipe: Bem, nesse caso, podemos dizer que o declive é infinito. [O Filipe, colocou então a mão numa posição vertical, para indicar a direcção desse tipo de rectas].
>
> L. Carlos: Infinito? Mas, ... mais infinito ou menos infinito?
>
> Filipe: Infinito sem qualquer tipo de sinal.

Para o Filipe era suficiente afirmar que uma recta vertical tinha declive infinito sem se preocupar com o tipo de sinal. Aliás, esta sua noção de infinito sem qualquer tipo de sinal foi uma constante ao longo desta intervenção didáctica. Nas questões que diziam respeito a derivadas laterais com declives infinitos, este aluno, só se preocupou com o tipo de sinal a atribuir ao símbolo de infinito quando lhe foi directamente solicitado pela investigadora ou pela professora.

Para responder à mesma, o Luís Filipe, procedeu do seguinte modo: (a) começou por escrever $\frac{y - y_0}{0}$, mostrando identificar de uma forma adequada o declive de uma recta com uma relação de dependência entre os incrementos das variáveis; (b) em seguida escreveu m = $+\infty$, resultado do quociente considerado; (c) por fim escreveu "não tem significado, não existe declive se a recta for paralela ao eixo dos yy".

Em resumo: Para determinar o declive de rectas exibidas no ecrã do computador, os alunos, na sua maioria, consideraram dois pontos pertencentes a essas rectas, e determinaram o quociente entre os incrementos de y correspondentes a determinados incrementos de x. De uma maneira geral, referiram o incremento da variável dependente em função da variável independente "quando x aumenta 1, y aumenta 2", "quando x aumenta 2, y diminui 4". Estes incrementos não foram determinados como se se tratasse de números estáticos resultado de uma operação, mas como comprimentos de segmentos de recta correspondentes a um determinado movimento das variáveis. Por vezes, desenharam triângulos rectângulos em que os comprimentos dos catetos coincidiam com os valores absolutos dos incrementos das variáveis e determinaram o quociente entre esses valores.

Neste processo, alguns alunos não se sentiram amarrados aos pontos sugeridos na ficha de actividades, ainda que, por vezes, a leitura das coordenadas de outros pontos sobre a recta se tivesse mostrado, um pouco mais complicada.

Alguns alunos referiram-se à palavra declive como sinónima de tangente trigonométrica, evidenciando uma concepção de declive como uma característica do ângulo que a recta forma com o semi-eixo positivo dos xx.

Estes alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica no desenvolvimento das tarefas propostas, demonstraram possuir uma componente visual bem desenvolvida. Utilizaram os gráficos como o contexto privilegiado de resolução das questões e como argumentação e, além disso, fizeram-no de uma forma dinâmica. Usaram uma terminologia cheia de movimento, reforçada por gestos. Apoiaram-se em gráficos, diagramas, contagens e gestos.

Utilizavam as regras como recurso ou como argumentação. Mostraram-se arrojados no desenvolvimento das actividades.

Em relação à determinação do declive de rectas paralelas ao eixo dos xx, estes alunos mostraram ter recorrido à imagem de uma recta horizontal para afirmarem que o seu declive era zero, por ser nulo o incremento de y.

O declive de rectas paralelas ao eixo dos yy, causou uma certa perturbação a alguns alunos que manifestaram uma certa dificuldade em falar de declives infinitos.

5.1.2. Estratégia analítica

Embora, como já referimos na secção anterior, a observação e análise dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos ao longo desta experiência de ensino tenha evidenciado que, a sua maioria, utilizou uma estratégia que denominámos de geométrica na determinação do declive de uma recta, alguns alunos, e de uma forma mais sistemática, a Cristiana, nas suas respostas utilizaram elementos próprios de uma linguagem que podemos denominar de mais analítica.

Considerámos que os alunos utilizaram uma estratégia analítica, na determinação do declive de uma recta, quando:

(a) Recorreram à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ou enunciaram a regra "final menos inicial a dividir por...", sem relacionarem esses procedimentos com qualquer tipo de imagem gráfica;

(b) Se referiram ao declive como um número, um coeficiente numérico dentro de uma expressão analítica, o que supõe um esquema conceptual algorítmico, no sentido em que não explica o que é o declive mas como se obtém a partir de uma equação ou a partir da aplicação de uma fórmula, ou seja, resultado dos procedimentos que utilizavam para o reconhecer;

(c) Os gráficos desempenhavam um papel secundário.

Assim, estes alunos, na determinação do declive de uma recta, tinham como base as regras e as fórmulas sem qualquer imagem gráfica. Dos gráficos passavam rapidamente para as regras "tangente de 45° é igual a 1", ou seja recorriam a propriedades algébricas ou numéricas, e utilizavam-nas de uma forma estática. Os seus apoios eram baseados em procedimentos analíticos e na aplicação de fórmulas em que se mostraram à vontade. Preferiam códigos verbais a imagens. De uma maneira geral, estes alunos preocupavam-se com o rigor e com a precisão, e eram prudentes nos processos de resolução das questões. Revelaram algumas dificuldades em trabalhar com os gráficos, embora, uma vez ou outra, por sugestão de outro colega de grupo, tenham calculado o declive da recta, através da observação gráfica. Contudo, mesmo nesses casos, confirmaram, analiticamente, os resultados a que tinham chegado por via gráfica. Estavam habituados a memorizar regras e procedimentos, muitas vezes sem qualquer compreensão da razão porque essas regras e procedimentos funcionavam.

Começamos por apresentar e tentar interpretar uma situação em que se tornam bem visíveis os dois tipos de estratégias utilizados pelos alunos na determinação do declive de uma recta.

Para determinar o declive de qualquer um dos segmentos de recta da figura 5.8 — questão 1, da ficha V, a Cristiana, uma aluna que privilegiou, ao longo desta experiência de ensino, uma abordagem analítica das questões, quis aplicar regras. De uma maneira geral, esta aluna aplicava as regras de uma forma adequada e com alguma segurança.

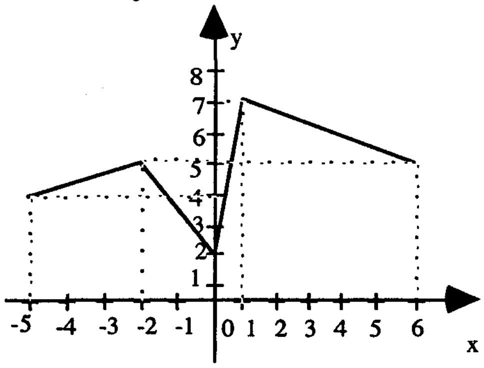


Fig. 5.8 - Gráfico da questão 1 da ficha V

Crist: [Lê a pergunta da ficha] Existe f'(-2)? Não. Eu escrevi...

L. Filipe: Porque [os declives] são diferentes...

Crist: Pois.

L. Filipe: Um dá 1/3 e o outro dá...

Crist: 3/2.

O Luís Filipe obteve este valor depois de ter desenhado um triângulo rectângulo (figura 5.9) e de ter determinado o quociente entre os comprimentos dos seus catetos que, dizia o Luís Filipe, "representavam os incrementos das variáveis".

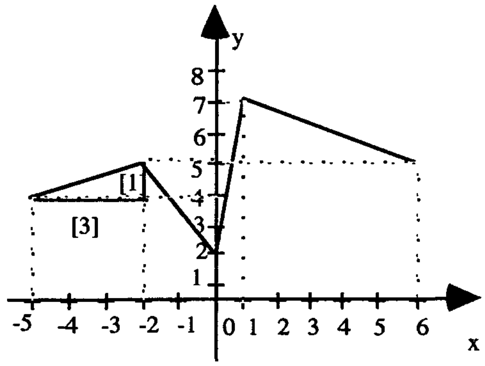


Fig. 5.9 - Esquema elaborado pelo Luís Filipe para determinar f' (-2^-)

Este resultado da Cristiana tinha sido obtido a partir da aplicação da fórmula $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, mas a Cristiana não conseguia perceber bem, a partir do gráfico qual era o b e qual era o a. Esta aluna sabia que numa função apresentada na sua forma analítica, determinava o declive, ou a taxa de variação média, considerando um intervalo [a, b] e substituindo x pelos extremos do intervalo, para obter f(b) e f(a), a que ela chamava " de final e inicial". O valor atribuído pela Cristiana para declive do segmento de recta no intervalo de -2 a 0, é o resultado da aplicação da fórmula $\frac{f(0) - f(-2)}{0 - 2}$ [em vez de $\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)}$].

L. Filipe: Dá -3/2.

Para obter este valor, o Luís Filipe desenhou um triângulo rectângulo (figura 5.10), determinou o quociente entre os comprimentos dos seus catetos (incremento de 3 unidades nos yy correspondente a um incremento de 2 unidades nos xx).

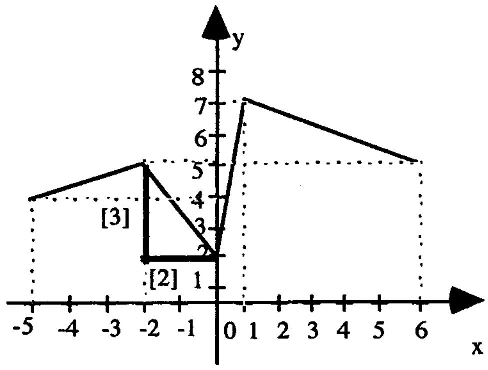


Fig. 5.10 - Esquema elaborado pelo Luís Filipe para determinar f' (-2^+)

O Luís Filipe acrescentou que o sinal era negativo porque a função era decrescente nesse intervalo, ou seja o declive tinha que ser negativo porque os valores de y diminuíam.

Crist: Ah! Então é aí o erro. Espera aí. -2... o último é menos...

A Cristiana continuava a olhar para a fórmula para ver qual o valor que não estava bem substituído [era o 2 em vez de -2].

L. Filipe: Podes ver assim... de duas formas.

O Luís Filipe queria que a Cristiana se libertasse da fórmula e queria explicar-lhe como é que se podia fazer de outra maneira, por observação directa do gráfico.

Crist: Deixa-me pensar sózinha. -2 está aqui. Portanto, o final que é 2, menos ... a dividir por... delta x, final menos inicial... [Repete a fórmula]

A Cristiana falava em delta x como sendo o "final menos o inicial", e associando-lhe um número, sem qualquer ligação com o comprimento de um segmento de recta. Não lhe atribuía qualquer significado gráfico, nem conseguia determinar o seu valor por simples observação gráfica.

Assim, para estes dois alunos a palavra incremento tinha significados bastante diferentes. Para a Cristiana o incremento era um número, o resultado de uma operação. Para o Luís Filipe, o incremento era um segmento de recta que tinha um determinado comprimento.

L. Filipe: Não, esse tens bem. O que tens mal é à direita. À esquerda tens bem.

Crist: *Stora*, pode chegar aqui, se faz favor? Esta está aqui, depois esta está aqui [Apontava no gráfico exibido no ecrã do computador, sobre o eixo dos xx, os pontos de abcissa -2 e 0]. Então delta y é 2, que é o final...

Inv: Não. Delta y, vê-se aqui, não é? [Aponta-lhe o eixo dos yy].

A Cristiana fazia um esforço para obter os valores por observação gráfica (sabia que era aquilo que a professora e a investigadora queriam), mas perante uma dificuldade [fala em delta y e está a observar um intervalo no eixo dos xx] volta à regra "final menos inicial... f(0) que é 2, menos f(-2) que é 5".

Crist: Mas é 2 menos 5.

Inv: É este comprimento, que vai daqui até aqui. O que interessa é este comprimento.

A investigadora tentava que a Cristiana visse directamente no gráfico os incrementos das variáveis.

Crist: Então depois...

L. Filipe: É 5 menos 2.

O Luís Filipe dizia 5 menos 2 porque não se preocupava com "pontos iniciais" e "pontos finais", o que lhe interessava era determinar aquele comprimento. Este aluno tinha uma boa compreensão geométrica do conceito e confiava na sua capacidade de relacionar situações. Assim, sabia que, depois de determinar o valor absoluto do declive deveria ter em atenção o seu sinal, uma vez que a função era monótona decrescente, nesse intervalo.

Crist: Então e depois para colocar o sinal?

A Cristiana queria obter o valor correcto como o resultado de aplicar uma fórmula sem ter que se preocupar com o facto de se tratar de uma função monótona crescente ou monótona decrescente. Esta aluna que confiava na sua memória para recordar fórmulas, receava esquecer-se de relacionar a monotonia de uma função com o sinal do declive da recta, perante uma situação apresentada na forma gráfica.

Inv: Mas quer fazer mesmo o cálculo? Porque é que não conta as quadrículas? 1, 2, 3..

Crist: Mas eu... qual é o final?

Inv: O que lhe interessa é a distância que vai daqui até aqui, não é?

Crist: Sim. É 3 e depois é 2, mas assim eu não sei qual é o sinal.

Em resumo, o Luís Filipe não se preocupava com a fórmula. Determinava, no gráfico, o valor dos incrementos das variáveis (contando, por vezes, quadrículas) e, no final, reparava se tinha ou não que colocar o sinal menos, conforme se tratava de uma função decrescente ou de uma função crescente.

A Cristiana não aceitava este tipo de resolução. A fórmula, desde que bem aplicada, deveria dar o declive com o sinal adequado, sem ter que se preocupar com o tipo de inclinação da recta. A Cristiana mantinha as suas representações analíticas para interpretar informação gráfica. Era uma boa aluna e tinha bom aproveitamento. A sua dificuldade com a representação e interpretação de gráficos entristecia-a.

De início, a Cristiana mostrou um certo desagrado em trabalhar com o computador. Uma aluna habituada a ter sucesso nos testes escritos começava a sentir-se vacilar perante questões que pareciam colocar em causa os seus conhecimentos. Além disso, o seu colega de grupo, o Paulo, utilizava sempre que possível, uma estratégia mais geométrica, o que baralhava um pouco o raciocínio da Cristiana que queria fazer os seus cálculos muito certinhos.

Para determinar o declive da recta representativa da função y = x a Cristiana começou por considerar dois pontos sobre essa recta (-5, -5) e (5, 5) e aplicou a fórmula $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Confrontada com a questão levantada pela investigadora, a Cristiana recorreu ao cálculo da tangente trigonométrica do ângulo que essa recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx. Dizia a Cristiana: "como o ângulo é de 45°, então a tangente de 45° é igual a 1, logo o declive da recta é 1".

> Crist: -5 -5 dá -10; -5-5 dá -10. Então dá 1.
>
> Inv: Estavam à espera que o declive dessa recta desse 1, ou não?... Que vos parece?
>
> Crist: Sim, porque ela tem um ângulo de 45°, e a tangente de 45° é 1.

A investigadora queria perceber se a Cristiana tinha construído uma representação visual de declive de uma recta. A aluna continuava a evocar regras para determinar o declive "a tangente de 45° é igual a 1" e tinha que "fazer cálculos no papel"...

> Crist: Vai ser sempre o mesmo. Tangente de α é o cateto oposto sobre o cateto adjacente.
>
> Paulo: [Aponta no computador e faz o cálculo mental.] É 2.
>
> Crist: Assim não percebo nada... -4 -6 dá 10; 10 a dividir por 5 dá 2. A tangente de α é 2. O cateto oposto há-de ser este [aponta no computador]... sobre cateto adjacente... de 0 para 5 vão 5; de 2 para 4,5 dá 2,5; 5 a dividir por 2,5 dá 2. Eu cá não me oriento no computador sem fazer cálculos no papel...

A Cristiana, ao contrário do que fazia qualquer aluno mais geométrico, obteve o declive 2 utilizando uma fórmula, o gráfico foi utilizado com um papel secundário. A regra foi a base do raciocínio desta aluna.

5.1.2.1. Taxa de variação média

Na questão B.1 e B2. da ficha I, pedia-se aos alunos que representassem graficamente, utilizando o computador, as funções f(x) = 2x + 1 e f(x) = exp (x) e que determinassem a sua taxa de variação média em dois intervalos com a mesma amplitude. Em relação à primeira função, os alunos, de uma maneira geral, calcularam a taxa de variação média aplicando a fórmula, ou seja, calculando o quociente entre a diferença dos valores da função nos extremos do intervalo e a amplitude desse mesmo intervalo. Em relação à segunda função, os alunos aplicaram também essa fórmula mas foram confrontados com a dificuldade adicional de determinar o valor da função nos extremos do intervalo. Acabaram por considerar valores aproximados ainda que, a princípio, tenham demonstrado alguma renitência em o fazer.

Na questão B.3. da mesma ficha, pedia-se uma comparação entre os resultados obtidos nas duas questões anteriores. Os alunos concluíram que, no caso de uma função ser representada por uma recta, a taxa de variação era constante em qualquer intervalo e que no caso de se tratar de uma curva, a taxa de variação não era constante, mesmo que a amplitude dos intervalos fosse a mesma.

A Cristiana, para determinar a taxa de variação média da função f(x) = 2x+1, nos intervalos [0, 2] e [-3, -1], continuou a aplicar fórmulas e a fazer cálculos. Manifestou algumas dificuldades em ler os valores a partir dos gráficos exibidos no ecrã do computador e, embora falasse, com certa facilidade, em incrementos das variáveis, parecia não perceber bem o seu significado gráfico. Falava em termos de "final menos o inicial", mas sem saber como é que isso de final e de inicial se lia no gráfico. Esta aluna demonstrava possuir um conceito de taxa de variação média que estava associado apenas a um número, resultado da aplicação de uma fórmula.

> Crist: Agora é uma função nova, 2x+1. Calcule a taxa de variação?... *Stora* ? Como é que se calcula a taxa de variação média?

A Cristiana tinha esquecido a fórmula da taxa de variação média de uma função num determinado intervalo.

> Prof: A que é que eu chamei taxa de variação? Hoje disse-vos que era o quê?
>
> Crist: Era a razão incremental.
>
> Prof: Exacto. Eu chamei-lhe as duas coisas.
>
> Crist: É o delta y a dividir por delta x.

A Cristiana associou, de uma forma correcta, taxa de variação média a uma razão incremental e a um quociente entre delta y e delta x mas, não compreendia aquilo que verbalizava. Assim, começou por considerar os dois intervalos como se fossem dois pontos que pertenciam ao gráfico da função e utilizou os seus extremos na fórmula "final menos inicial".

Paulo: Portanto, é delta x a dividir por delta y.

Repare-se que o Paulo, um aluno que privilegiava estratégias geométricas na resolução das questões, falhou ao enunciar a regra. Ele sabia como determinar a taxa de variação a partir da observação gráfica, mas não conseguia verbalizar a fórmula. A Cristiana sabia a fórmula, aplicava-a bem em contexto analítico, mas não tinha o mesmo sucesso em contexto gráfico.

Crist: Não. É o delta y a dividir por delta x. ... 2 - (-1) a dividir por 0 - (-3).[Os intervalos eram $[0, 2]$ e $[-3, -1]$. Dá 1

Repare-se que a Cristiana aplicou a fórmula para obter o declive de uma recta como se os intervalos fossem pontos.

Prof: Olhem que é a taxa de variação média nos intervalos $[0, 2]$ e $[-3, -1]$.

Crist: Ah! É o final menos o inicial.

Perante a observação da professora a Cristiana recorre, de novo, à fórmula "final menos inicial", mas considerando agora o intervalo $[0,2]$.

Prof: Quanto é o delta x?

Crist: É 2.

Este valor dado pela Cristiana é o resultado da operação 2 - 0, uma vez que a aluna nem sequer olhou o gráfico da função.

Prof: E o delta y, sabes quanto é?

Crist: Não.

Prof: Então tens que ir lá ver.

A Cristiana percebeu a sugestão da professora — devia determinar o incremento de y, a partir do gráfico. Fez um esforço por cumprir mas, atrapalhou-se.

Crist: O delta x é 2 [de 0 a 2]. Agora tenho que ver quanto é que o y varia... o y de 0 a 2 varia... eu não percebo isto...

Inv: Mas quanto é que é?

Crist: Não sei. É este bocadinho.

Inv: Qual bocadinho?

Crist: O bocadinho que tenho aqui de 0 a 2.

A Cristiana apontava a distância que ia de 0 a 2, no eixo dos xx. Como sentiu que não tinha sucesso a partir do gráfico, retomou a fórmula. Determinou f(2) e f(0), substituindo x por 2 e por 0, na expressão analítica da função. Substituiu esses valores na fórmula que lhe permitia obter a taxa de variação média e obteve o valor 2. Para determinar a taxa de variação média da mesma função no intervalo [-3,-1], disse a Cristiana:

> Crist: Não sei...Tenho então que ir calcular o declive. Mas como é que eu sei a variação dos yy. Não, não. Eu gosto mais de fazer assim f(-3) - f(-1) a dividir por -3 - (-1). Dá 2. A taxa de variação média deu o mesmo.

Em resumo, a Cristiana tinha memorizado a fórmula que certamente lhe iria ser útil na resolução das questões. Falava em razão incremental e em delta y a dividir por delta x, sem estabelecer qualquer conexão com o significado gráfico dessas noções matemáticas: "mas como é que eu sei a variação dos yy?... Não, não. Eu gosto mais de fazer contas, de fazer assim: f(3) - f(-1) a dividir por -3 - (-1)".

5.1.2.2. Rectas paralelas aos eixos

Alguns alunos justificaram que o declive de rectas paralelas ao eixo dos xx era zero porque "a tangente de zero é zero", sem evidenciarem qualquer relação daquilo que verbalizavam com uma interpretação gráfica.

> Crist: Então é zero. A tangente de zero é zero. O declive é zero. Eu vou pôr assim como disse, achas que está certo?
>
> Paulo: Sim. Está certo.

Contudo, depois de aprofundar um pouco esta resposta dada pelo Paulo, por nos termos apercebido que tinha sido dada um pouco para "despachar", chegámos à conclusão que o facto de este aluno ter concordado com a Cristiana não significava que o seu raciocínio estivesse correcto.

> Inv: E em relação ao declive de uma recta paralela ao eixo dos xx?
>
> Paulo: É zero.
>
> Inv: Porquê? Justificaram?
>
> Paulo: Eu escrevi que era porque o declive é igual a y/x.

O Paulo, um aluno que privilegiava estratégias geométricas de resolução das questões, falhou, uma vez mais, perante a necessidade de recorrer a uma fórmula para dar uma justificação.

> Crist: Eu escrevi que era porque a tangente de zero era zero.
>
> Paulo: Se a recta for paralela ao eixo dos xx, se considerarmos o ponto zero, o y é 0. Logo é 0/x, que dá zero.
>
> Inv: Espere lá Paulo, não percebi bem.
>
> Paulo: Paralela ao eixo dos xx. Considerei que estava mesmo em cima do eixo dos xx, ou seja que era o próprio eixo dos xx. O y é sempre 0, então qualquer que seja o x, 0/x = 0.

O Paulo estava a considerar como declive de uma recta, o quociente entre o valor do y e o valor de x. Considerou, além disso, um caso muito particular de recta paralela ao eixo dos xx, o próprio eixo dos xx. Na sua ficha de trabalho escreveu: m = y/x = 0/x = 0. Esta concepção errónea na determinação do declive de uma recta paralela ao eixo dos xx também foi verificada nos alunos do estudo de Orton (1983). Alguns destes alunos, determinaram o declive de uma recta a partir da razão entre o incremento de y e a abcissa de x.

Inv: Considerou um caso muito particular. Imagine agora uma outra recta que seja paralela ao eixo dos xx.

Paulo: Por exemplo, se tiver y = 2. Se considerarmos o x=1000, por exemplo, o y é sempre 2. Então 2 a dividir por um número muito grande, dá sempre zero.

Inv: A Cristiana concorda com o que o Paulo está a dizer?

Crist: Eu não.

Paulo: Não é?...

Inv: O que o Paulo está a dizer é assim... quando considera... Mas, o declive de uma recta é único?

Crist: Pois. E assim vai variar.

Inv: Pois é. Assim parecia que variava. Quando x era muito grande e considerando y=2, disse que o quociente ia dar zero, mas se considerar, por exemplo, x=2, vinha dar, como declive, 1. Então o declive variava.

Paulo: Pois. No exercício 1 também fizemos isso.

O Paulo recordou que, na primeira actividade, tinham concluído que o declive de uma recta era único.

Inv: Fizeram diferenças. Viram qual era o incremento de x e qual era o incremento de y.

Paulo: Sim.

Inv: E depois para encontrarem o declive o que é que fizeram? Dividiram o incremento de y pelo incremento de x.

Paulo: Sim. [O Paulo acabou por perceber o erro].

Repare-se no contraste que existe entre estes dois alunos. A Cristiana mostra factos "tangente de 0° é 0". De uma maneira geral, esta aluna tem sucesso na utilização de fórmulas. O Paulo é um aluno que privilegia estratégias geométricas de resolução e quando precisa de recorrer à Álgebra não tem sucesso, não sabe as fórmulas.

Como já foi sublinhado, a questão 5 da ficha I causou alguma perturbação aos alunos. Pedia-se que indicassem o declive de uma recta paralela ao eixo dos yy. Alguns alunos manifestaram um certo receio em falar de declives infinitos. A Cristiana associou, de imediato, a resposta, ao facto da tangente de 90° não estar definida. Tentou aventurar-se a afirmar que era + ∞ mas, como não lhe parecia uma afirmação muito correcta, acrescentou: "tende para + ∞?"

Crist: Se a recta fosse paralela ao eixo dos yy?... Tangente de 90° = + ∞... Sem significado... sei lá... não tem valor... A tangente de 90° é sem significado... não é? Se a recta for paralela ao eixo dos yy, a tangente fica sem significado, logo não tem valor.

Inv: Podemos dizer que o declive dessa recta é ... ?

Crist: Pode-se dizer que é + ∞? Digo que o declive tende para + ∞?...

A Cristiana, uma vez mais, vai à procura de uma regra já sua conhecida para justificar a resposta, sem evidenciar qualquer relação com o aspecto gráfico da recta.

Em resumo: A Cristiana, uma aluna que ao longo desta experiência de ensino privilegiou uma estratégia analítica no desenvolvimento das actividades, parece ter adquirido uma compreensão do declive de uma recta baseada na memorização de regras através de representações analíticas. As suas traduções frequentes da representação gráfica para a representação analítica sugerem que esta aluna se sentia mais confortável com símbolos algébricos do que com gráficos.

Para determinar o declive de uma recta, recorreu à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e aplicou regras "final menos inicial a dividir por...", sem qualquer conexão com a respectiva representação gráfica. Procurando compreender as características desta aluna parece-nos possível afirmar que manifestou certas limitações na capacidade de relacionar conceitos. A abordagem analítica parecia dar-lhe mais segurança. Esta aluna demonstrou ter conhecimento dos conceitos e competências básicas relacionadas com o declive de uma recta mas, por vezes, parecia não compreender muitas das estruturas fundamentais desses conceitos. Ficou-nos a impressão de que esta aluna recorria à memorização de regras e procedimentos que acreditava representarem a essência da Matemática.

Contudo, parece-nos importante sublinhar que esta aluna, no decurso da experiência de ensino foi construindo significado para o declive de uma recta através da análise das representações gráficas que não estavam desenvolvidos através de estudos apenas analíticos e procedimentais.

5.1.3. Estratégias mistas

Alguns alunos utilizaram simultaneamente estratégias geométricas e analíticas na determinação do declive de uma recta e que, neste estudo, vamos denominar de estratégias mistas. Estes alunos mostraram possuir um equilíbrio entre as componentes visuais e analíticas. Conseguiram sintetizar informação gráfica e analítica para desenvolver algumas das actividades.

Na questão B.1 da ficha I eram dadas duas funções — f(x) = 2x+1 e f(x) = exp (x) e pedia-se a taxa de variação das funções em dois intervalos. Esta actividade tinha como principal objectivo que os alunos compreendessem que a taxa de variação média de uma função afim era constante, quaisquer que fossem os intervalos considerados, mas que essa propriedade não se verificava noutro tipo de funções.

O Filipe e o Luís Carlos, em relação à primeira função, começaram por utilizar o gráfico para responder às questões.

Inv: Então, de quanto é que seria a taxa de variação média da função f(x) = 2x + 1, no intervalo [0, 2] ? [O gráfico da função estava traçado no ecrã do computador].

L. Carlos: Era, era ... Aqui não dá para ver bem... no x está a "andar" praticamente... 1, 2, ...

Estes dois alunos falam em taxa de variação média de uma recta num determinado intervalo como sinónimo de declive dessa recta. Como já referimos, o Luís Carlos gostava de determinar o incremento de y correspondente a um incremento unitário de x. Assim, neste caso, parecia estar com algumas dificuldades em determinar outro tipo de incrementos. Perante a questão, o Luís Carlos sentiu-se amarrado ao intervalo [0, 2].

Em relação à taxa de variação média no intervalo [-3,-1], dizia o Filipe:

Filipe: Em 5 de y andou 3 de x, não foi? [Assinalou os incrementos das variáveis de acordo com a figura 5.11]. Passa aqui e aqui, em -3 e passa aqui.

Inv: Então não é 5.

Filipe: Pois não. É 6.

Inv: Então quanto é que dá?

L. Carlos: Sim, está bem. Assim dá para ver melhor. É que eu não estava a conseguir arranjar dois pontos de fácil leitura das coordenadas. Então há-de ser 2.

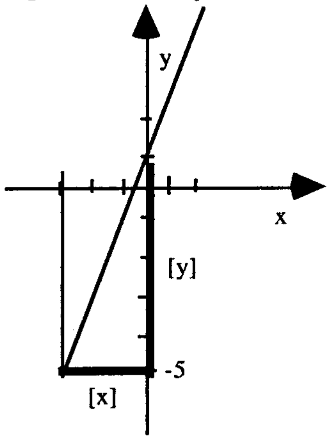


Fig. 5.11 - Esquema elaborado pelo Filipe para determinar a taxa de variação média no intervalo [-3,-1]

O Luís Carlos "não estava a conseguir arranjar dois pontos de fácil leitura" porque continuava a querer considerar o incremento de y correspondente a um comprimento unitário nos xx.

O Luís Carlos leu a questão 2.b que se referia à função exponencial.

L. Carlos: No intervalo [-2, 0] ... não consigo ler os valores... ou melhor, tenho que ir pela definição.

Perante a dificuldade de utilizarem uma estratégia geométrica, estes alunos não ficaram parados, recorreram a uma estratégia analítica, ou seja, perante um novo contexto, estes alunos, utilizaram estratégias diferentes no desenvolvimento de actividades que envolviam o mesmo conceito.

Filipe: Temos que ir pela definição de taxa de variação média.

L. Carlos: Neste intervalo... (f(-2) - f(0)) a dividir por... (-2 - 0) ... isto seria... f(-2)...

De sublinhar a versatilidade demonstrada por estes alunos para resolver estas questões.

Na resolução da questão 1 da ficha V (figura 5.12), o Filipe utilizou estratégias diferentes, embora ambas geométricas para determinar o declive de uma recta.

Filipe: O declive não é o seno sobre o coseno?

L. Carlos: O que é?

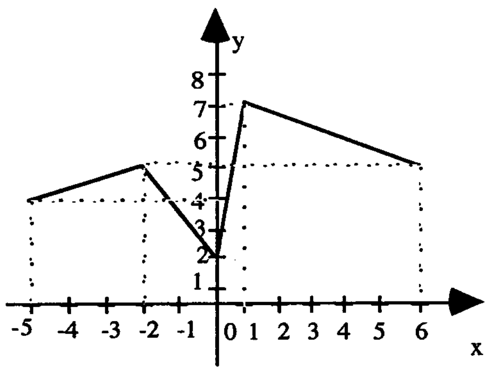


Fig. 5.12 - Gráfico da questão 1 da ficha V

Filipe: A tangente não é o seno sobre o coseno?

L. Carlos: É.

Por um lado, o Filipe referiu que o declive era o seno sobre o coseno, que era a tangente — estratégia que poderíamos denominar de geométrica-trigonométrica.

Filipe: Então fica 1 a dividir por 3.

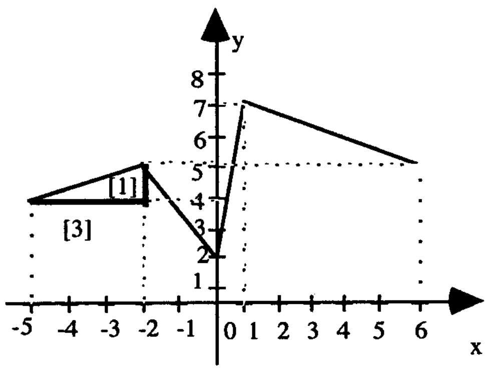


Fig. 5.13 - Esquema elaborado pelo Filipe para determinar f' (-2⁻)

Parece-nos ser possível concluir que o Filipe enveredou por este caminho uma vez que desenhou o triângulo rectângulo de acordo com a figura 5.13, na posição ideal para falar de seno sobre coseno.

L. Carlos: Sim. 1 a dividir por 3... Espera aí, a gente está no ponto 5.

Filipe: Na recta. Não foi o que tu disseste?

L. Carlos: E qual é o ponto 5 aqui? 1, 2, 3, 4, 5. É aqui. Então tu dizes que é o quê?

Inv: Explique lá isso que disse, Filipe.

Filipe: Eu estou a pensar na recta.

L. Carlos: Eu vejo aqui 3 para 3.

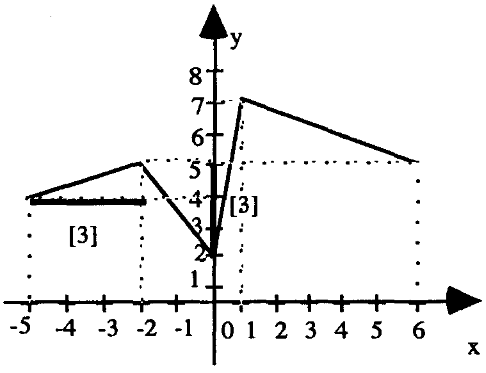


Fig. 5.14 - Possível esquema imaginado pelo Luís Carlos para determinar $f'(-2^-)$

O Luís Carlos parecia estar a considerar os incrementos de acordo com a figura 5.14, ou seja, este aluno amarrado à sua estratégia própria na determinação do declive de uma recta, debatia-se com algumas dificuldades quando as rectas tinham uma inclinação em que não era imediato considerar um incremento unitário nos xx, a começar num ponto de ordenada nula.

Filipe: 3 para 3? Ela sobe 1 e anda 3 para o lado.

Por outro lado, o Filipe falou em: "ela sobe 1 e anda 3 para o lado", ou seja recorreu ao quociente entre os incrementos das variáveis, para dar uma justificação ao Luís Carlos.

L. Carlos: Ah! Não... 1 para 3. 1/3.

Em relação à questão 4, da ficha V em que se pedia aos alunos que, sem efectuarem cálculos, determinassem a derivada, no ponto de abcissa 1, de duas funções de segundo grau traduzidas nas suas representações analítica e gráfica, o Luís Carlos traçou a recta tangente à curva no ponto de abcissa 1, e tentou determinar o seu declive. O facto da determinação dos incrementos das variáveis não se ter manifestado fácil, levou a que o aluno sentisse necessidade de evocar a equação reduzida da recta, evidenciando, deste modo, um intercâmbio saudável entre a Geometria e a Álgebra. A intervenção da investigadora fez com que o aluno optasse por pensar num valor aproximado desse declive e, nessa altura, o aluno passou a raciocinar em termos geométricos.

L. Carlos: A tangente é... [Desenhou uma recta tangente à curva no ponto de abcissa 1]. Tenho que ver, nesta recta, qual é o declive.

Inv: Exacto.

L. Carlos: Espere, espere. Eu vou fazer. Eu tenho y = mx + b, eu ... para o ponto 1...

O aluno pretendia partir da equação reduzida da recta, substituir x e y pelas coordenadas de dois pontos que pertenciam à recta para obter a equação da recta e, em seguida, ler o valor do respectivo declive.

Inv: Mas como já tem o esquema feito, intuitivamente, quanto é que lhe parece que é?

L. Carlos: Para 1 x, parece ter andado 1 y, então o f' (1) parece ser 1.

O Luís Carlos embora privilegiasse a utilização de uma estratégia geométrica no desenvolvimento das actividades, sabia as fórmulas a que podia recorrer quando necessário. Neste caso, a ligação entre a interpretação gráfica e a utilização de fórmulas, ou seja, a ligação geométrico — analítico parecia facilitar-lhe o desenvolvimento da actividade.

Na questão 1 da ficha III, pedia-se a representação gráfica da função $f(x) = x^2$ e da sua função derivada. Os alunos deviam utilizar o gráfico da função derivada para determinarem a derivada da função em alguns pontos. Uma das opções do programa *A Graphic Approach to the Calculus* permitia a sobreposição dos gráficos da função e da sua função derivada, sem exibir a correspondente expressão analítica.

O Zé, depois de ter observado a recta que representava o gráfico da função derivada, exibida no ecrã do computador e que deveria utilizar para a determinação da derivada nos pontos pedidos, sentiu alguma dificuldade em ler as ordenadas desses pontos. Tentou encontrar a expressão analítica da função derivada representada no ecrã do computador. Não conseguia determinar o declive dessa recta. O Luís Filipe, considerado um aluno que privilegiava estratégias geométricas de resolução das questões, sentiu necessidade de recorrer à fórmula, para explicar ao colega.

L. Filipe: Vamos considerar dois pontos sobre a recta.

Prof: Isso mesmo. Vê lá se consegues ver aí o declive.

L. Filipe: Este ponto (1, 2) é bom.

Prof: O ponto (4, 8) também é um ponto bom. Então qual é o declive?

O Luís Filipe deu a resposta certa -2, mas o Zé continuou sem perceber. Talvez por conhecer a preferência do Zé por fórmulas, o Luís Filipe tentou explicar de outro modo.

L. Filipe: Ouve lá. O valor de **m** não é dado por... $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$?

Zé: Sim.

L. Filipe: Vais buscar 2 pontos, neste caso (1, 2) e (2, 4) e assim vem $\dfrac{4 - 2}{2 - 1} = 2$. Isto é o declive da recta.

O Luís Filipe conseguiu utilizar estratégias diferentes em relação à mesma situação. Para o Luís Filipe era um desafio conseguir explicar ao colega aquela resposta que, para ele, era quase intuitiva. Recorreu a uma linguagem analítica por ter considerado que poderia ajudar mais o colega e talvez, por ter considerado uma justificação mais convincente. Como vimos na revisão de literatura, as resoluções gráficas, por vezes são mais difíceis de explicar, desde que os alunos não tenham sido estimulados para um tipo de pensamento visual. De uma maneira geral, é mais fácil dar uma explicação a partir de uma apresentação sequencial e algorítmica, do que a partir um conjunto de representações visuais.

Em resumo: Ainda que, por vezes, nos pareça difícil estabelecer as fronteiras entre as estratégias utilizadas pelos alunos na determinação do declive de uma recta, para uma mais fácil compreensão dos processos desenvolvidos pelos alunos, agrupamo-las em três categorias diferentes: estratégia geométrica; estratégia analítica e estratégias mistas.

Os alunos que privilegiaram a estratégia geométrica no cálculo do declive de uma recta, partiram da representação gráfica das funções representadas por rectas. Utilizaram dois pontos pertencentes a essas rectas (sugeridos pela investigadora ou escolhidos por eles próprios), determinaram o quociente entre o incremento de y e o correspondente incremento de x. Para determinar esses incrementos os alunos limitaram-se a contar os espaços directamente no ecrã do computador, sugerindo uma relação de movimento na determinação do declive "quando y se desloca de ... unidades, x desloca-se... unidades".

Outros alunos, no entanto, privilegiaram uma estratégia analítica na determinação do declive de uma recta. Estes alunos sentiram necessidade de recorrer à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, e de aplicar regras e fórmulas, sem qualquer significado gráfico.

Os alunos que utilizaram estratégias mistas na determinação do declive de uma recta referiram que o declive era o seno sobre o coseno, que era a tangente [trigonométrica], por outro lado, falaram de quociente entre os incrementos das variáveis e, por vezes, recorreram também à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Apresentamos um quadro resumo e comparativo das duas principais estratégias utilizadas pelos alunos na determinação do declive de uma recta.

Quadro 5.1 — Determinação do declive de uma recta

Alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica	Alunos que privilegiaram uma estratégia analítica
• Consideram dois pontos sobre a recta e determinam o quociente entre incrementos, determinados a partir do gráfico. Atribuem a esses incrementos uma noção de movimento.	• Recorreram à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e enunciaram as regras "final menos inicial a dividir por...". Falavam em Δy e em Δx, sem relacionar com a representação gráfica.
• Os alunos imaginaram rectas paralelas ao eixo dos xx, e assinalaram que o seu declive era nulo por ser zero o incremento de y. Não recorreram a regras. Resposta baseada na visualização de um incremento nulo.	• Era regra adquirida que o declive de rectas paralelas ao eixo dos xx era zero, "a derivada de uma constante é zero", "a tangente de 0° é 0", sem mais explicações e sem recorrer a qualquer tipo de visualização.
• Afirmaram que o declive de rectas paralelas ao eixo dos yy era infinito sem mais justificações, ou referiram não estar definido recordando o que tinham aprendido aquando do estudo das funções trigonométricas.	• Afirmaram que o declive de rectas paralelas ao eixo dos yy não estava definido uma vez que "a tangente de 90° também não estava definida".
• Os alunos verbalizaram " quando x tem um acréscimo de ... unidades, y cresce de ... unidades", " para um aumento de... unidades, y diminui ... unidades", pelo que, não omitiram o sinal menos nas rectas com declives negativos.	• O valor obtido por aplicação da fórmula não era posto em causa, ainda que, por vezes, se obtivesse para uma função monótona decrescente, um declive positivo. Não estabeleciam qualquer conexão com a representação gráfica da função.

5.2. Relação entre declive e monotonia

Alguns dos alunos mais fracos, confundiam, no início desta intervenção didáctica, monotonia com sinal da função. Ultrapassado este obstáculo, não tiveram, de uma maneira geral, grande dificuldade em relacionar o declive de uma recta com a sua monotonia.

Contudo, alguns alunos, revelaram algumas dificuldades específicas na determinação do declive de rectas, principalmente perante rectas com declives negativos. O facto de saberem "de cor" (sem visualizarem o que verbalizavam) que o declive de uma recta se determinava a partir do quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x levava-os, muitas vezes, a não repararem qual o tipo de inclinação das rectas. Assim, o declive dava-lhes sempre positivo, quer se tratasse de rectas representativas de funções crescentes quer de funções decrescentes. Isto aconteceu quer a alguns dos alunos assíduos às aulas extra-lectivas com ferramentas computacionais, quer a outros alunos da turma. A maior parte das vezes, determinaram bem o quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x, mas não ligaram ao facto de o incremento de y ser negativo.

Quando questionados sobre esta concepção, estes alunos afirmaram que, em relação às rectas com declive negativo, não tinham dado qualquer importância ao facto da recta ter um ou outro tipo de inclinação. No entanto, sabiam dizer quando é que uma recta tinha declive negativo e quando tinha declive positivo quando se lhes pedia que relacionassem o declive de uma recta com a monotonia da função que essa recta representava. Estes alunos, no entanto, não conseguiam harmonizar e estabelecer as conexões matemáticas entre estas duas noções.

5.2.1. Estratégia geométrica

Para alguns alunos, a determinação do declive de uma recta implicava a determinação do quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x, sem grande atenção ao facto do incremento de y ser positivo ou negativo. Outros alunos, no entanto, evidenciaram estabelecer as conexões necessárias entre o sinal do declive das rectas e a monotonia das funções que representavam.

O Luís Carlos, como olhava sistematicamente para o gráfico da função e afirmava "para um acréscimo nos xx, quanto é que o y decresce?", não manifestou qualquer tipo de dificuldade na determinação de declives, quer se tratasse de rectas com declives positivos quer de rectas com declives negativos.

> L. Carlos: Agora penso exactamente do mesmo modo. Para um acréscimo de uma unidade nos xx, quanto é que o y decresce? Sim, porque neste caso, a função é decrescente. Claro que aqui o declive tem que dar negativo, uma vez que à medida que x cresce o valor de y decresce.

Vejamos os esquemas que o Luís Carlos fez para explicar como é que determinava o declive da recta de equação $y = -x-1$ (figura 5.15).

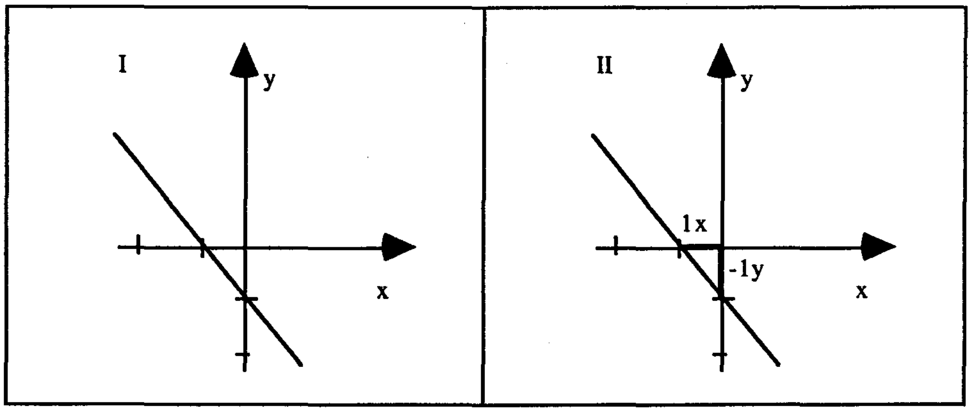


Fig. 5. 15 - Esquemas feitos pelo Luís Carlos para determinar o declive da recta

Este aluno demonstrou relacionar, de uma forma adequada, o declive de uma recta com a monotonia da função. Perante uma recta com declive negativo mudava o seu discurso "para um acréscimo nos xx, quanto é que o y decresce?". A utilização desta estratégia na determinação do declive de uma recta tem a vantagem de ajudar os alunos a fazer uma conexão imediata entre o declive de uma recta e a monotonia da função que a representa. Os alunos que privilegiaram uma estratégia analítica na determinação do declive de uma recta, ou que, embora utilizando uma estratégia geométrica, desenharam um triângulo rectângulo e determinaram o quociente entre os comprimentos dos seus catetos sem terem em atenção o facto do incremento de y ser negativo, apresentaram algumas dificuldades nesta ligação conceptual e omitiram, por vezes, o sinal quando se tratava de rectas com declives negativos.

5.2.2. Estratégia analítica

Pensamos que as dificuldades manifestadas por alguns alunos em relacionarem o declive de uma recta com a monotonia da função foram uma das consequências do pouco hábito manifestado por esses alunos, no início desta experiência de ensino, de interpretarem gráficos.

Vejamos, por exemplo, como é que a Cristiana reagiu à questão 3 da ficha I, em que se pedia aos alunos que relacionassem o declive das rectas exibidas no ecrã do computador com a monotonia das funções que elas representavam.

Crist: [Lê] *Relacione o declive das rectas com a monotonia das funções.* [E diz]: Monotonia das funções... elas são sempre monótonas...

Prof: Bem... Olha para elas... Por exemplo, esta o que é?

Crist: Crescem ou decrescem...

A Cristiana sabia o significado da palavra monotonia e, observando os vários gráficos exibidos no ecrã do computador sabia que uns representavam funções monótonas crescentes e outros representavam funções monótonas decrescentes.

Paulo: Esta é crescente.

Prof: Eu estou a pedir para relacionarem o declive com a monotonia... relacionar é dizer isto: se acontece isto, então ela é crescente, se acontece isto é decrescente.

Crist: Ah!... Se o declive é positivo então o que é que acontece?...

Prof: Vejam o que é que aconteceu com as rectas que tinham declive positivo [aponta essas rectas que ainda se encontram representadas no ecrã do computador], o que é que acontece? Estas duas rectas tinham declive positivo... o que é que acontece?

Crist: As rectas estão a crescer...

Prof: E quando o declive é negativo? Acontece alguma coisa de diferente?

Crist: Agora não estou a perceber.

A Cristiana, por simples observação gráfica, não conseguiu identificar as rectas que tinham declive positivo e as que tinham declive negativo.

Prof: Qual é a recta com declive negativo?

Paulo: [Apontando no ecrã do computador] É esta. A verde. É decrescente.

Prof: [Virando-se para a Cristiana, e apontando a recta verde exibida no ecrã] Olha lá para esta recta... então não começa a ter um valor muito grande e cada vez vai para um número mais pequeno?

A professora pensou que a dúvida da Cristiana se colocava ao nível de não perceber quando é que uma função era monótona decrescente.

Crist: Ah!... Sim. Quando o declive é positivo, a função é monótona crescente; quando o declive é negativo a função é monótona decrescente. Pronto.

Este "pronto" da Cristiana é muito significativo. Tinha conseguido, ainda que com algum esforço, uma regra que relacionava o declive de uma recta com a monotonia da função.

A Cristiana sabia a fórmula que podia aplicar para determinar o declive de uma recta e, na primeira actividade, aplicou-a bem. Obteve, desse modo, um valor negativo para o declive da recta f_3.

Crist: Sim o ponto é (-4,5). -4-5 dá -9, 5 + 4 dá 9. Então aqui dá -1. Em $f_3(x)$ dá -1. Então o declive da recta depende da função...

Em actividades posteriores, a Cristiana deparou-se com algumas dificuldades quando quis determinar o declive de uma recta, uma vez que aplicava mal a fórmula. Trocava, num dos termos da fracção, o valor "final" com o "inicial" o que conduzia a uma troca do sinal do declive. No entanto, esta aluna mostrava plena confiança no valor encontrado por se tratar do resultado da aplicação de uma fórmula. Teoricamente, a Cristiana sabia que o sinal do declive dependia da inclinação das rectas, mas este factor parecia secundário em relação ao valor obtido por aplicação da fórmula que, possivelmente, para esta aluna, seria o modo mais correcto de fazer matemática.

Também Orton (1983) concluiu que, para muitos dos alunos envolvidos no seu estudo, a aplicação da regra — quociente entre a diferença nos yy e a correspondente diferença nos xx — nem sempre se manifestou uma tarefa fácil aos alunos. Numa tarefa em que se pedia a taxa de variação entre dois pontos de uma função monótona decrescente nesse intervalo, 25% dos alunos omitiram o sinal negativo.

Na questão 3 da ficha VI, afirmava-se que a altura **h**, em metros, atingida por uma bola lançada verticalmente de baixo para cima, ao fim de **t** segundos, era dada pela função $h(t) = 16t - 4t^2$. Pretendia saber-se durante quanto tempo, as tangentes à curva representativa da função tinham declives positivos e durante quanto tempo tinham declives negativos. O Luís Filipe tentou resolver a questão graficamente.

L. Filipe: [Depois de ter lido alto a questão]. Declive positivo?... é quando [a função] é crescente.

Traçou gestualmente uma parábola com a concavidade voltada para baixo e relacionou imediatamente o sinal dos declives, em cada ponto, com a monotonia da função.

A Cristiana, associou pontos de uma função com declive positivo a pontos em que a função tinha derivada positiva. Determinou, utilizando as regras, a expressão analítica da função derivada e, resolveu a inequação $16 - 8t > 0$. Esta associação imediata da Cristiana parece consequência de actividades semelhantes desenvolvidas na aula de Física. Não fez referência a qualquer gráfico de apoio.

Crist: É $t < 2$. Ou seja é entre 0 a 2 segundos, intervalo aberto.

Repare-se que a Cristiana não se ficou pelo resultado $t < 2$. Acrescentou que as tangentes à curva representativa da função eram positivas entre 0 e 2 segundos, manifestando ter feito uma boa conexão entre as variáveis envolvidas. Como vimos na revisão de literatura, outras investigações referem o facto de os alunos manifestarem facilidade em resolver situações da vida real quando uma das variáveis é o tempo.

L. Filipe: Entre 0 e 2 segundos? Pois é [introduz a expressão no computador para obter o gráfico da função], quando chega ao 2...

Crist: [Quando chega a 2] O declive é nulo... Portanto no 2 o intervalo tem que ser aberto.

A Cristiana nem sequer olhou para o gráfico. Aquele valor 2 parecia ser a solução da equação $16 - 8t = 0$. O Luís Filipe, continuou a observar o gráfico e não estava completamente convencido daquilo que a Cristiana afirmava.

L. Filipe: Depois de chegar ao 2 começa a decrescer mas, pode não... depois volta a crescer. Temos que ver quando é que 16t...

A investigadora leu a questão 3.3. — *As tangentes ao gráfico terão declive negativo?* Para responder a esta questão, o Luís Filipe teve em conta a situação real, relacionou declive negativo com função monótona decrescente e afirmou: " declive negativo?... É quando a bola vem a descer".

L. Filipe: [O declive é negativo] É quando a função é decrescente. É quando a bola vem a descer.

Crist: É quando $t > 2$ s.

O Luís Filipe desenvolveu esta actividade associando a expressão analítica da função à sua representação gráfica — uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Além disso, teve em conta a situação real "é quando a função é decrescente. É quando a bola vem a descer". A Cristiana resolveu a mesma questão sem fazer qualquer referência ao gráfico representativo da função nem à relação existente entre a monotonia da função e o sinal do declive das rectas tangentes à curva representativa da função em cada ponto.

Na questão 4, da ficha VIII, era dada a expressão analítica da função $f(x) = 16x - 4x^2$ e pedia-se as abcissas dos pontos em que as tangentes à curva representativa da função tinham declives positivos e aqueles em que tinham declives negativos. Esta questão era semelhante à questão anterior mas faltava-lhe a situação real. A Cristiana, desenvolveu a actividade recorrendo à mesma estratégia utilizada na questão da ficha VI. Determinou a expressão analítica da função derivada utilizando as regras de derivação. Em seguida, indicou a inequação que lhe poderia fornecer os valores pedidos. Um erro de cálculo produziu uma resposta incoerente com a representação gráfica da função. No entanto, como esta aluna não associava a resolução analítica à respectiva representação gráfica da função, ficou satisfeita com a solução obtida. Depois de chamada a atenção para a incoerência dos valores obtidos, continuou a pensar em termos analíticos, sem qualquer conexão com a representação gráfica que esta questão podia sugerir.

Inv: Aqui na questão 4, para chegar ao valor $x = 2$, derivou e igualou a zero, não foi?

Crist: Sim.

Inv: Quando lhe perguntam quais os pontos em que as tangentes à curva têm declive positivo, como é que fez isso para obter como resultado $x > 2$?

Crist: Enganei-me. Como ali era -8x, tinha que inverter o sentido da desigualdade.

A Cristiana manteve a sua posição mesmo depois de a investigadora a ter chamado a atenção para o incoerência da resposta, de acordo com o gráfico (uma parábola com a concavidade voltada para baixo). Esta aluna preocupou-se em descobrir o erro cometido na resolução analítica da questão e não tentou perceber como é que, a partir do gráfico, podia verificar que a sua resposta não estava correcta.

Uma tradução para a representação gráfica da função podia ter evitado que a Cristiana precisasse de determinar a função derivada e resolvesse, de uma forma incorrecta, uma inequação, para responder a esta questão. A Cristiana não fez esta tradução. Parte da compreensão de uma ideia é a capacidade de reconhecer essa ideia implantada numa variedade de sistemas representacionais diferentes e traduzir a ideia de uma representação para a outra. As múltiplas representações podiam ter ajudado a que a Cristiana compreendesse de uma forma dinâmica processos de determinar o declive de uma recta, mas o ensino e os testes, por vezes, forçam os alunos a escolher estratégias mais para reproduzir do que para compreender. As regras e procedimentos são a parte forte e fraca da compreensão da Cristiana na determinação de declives.

Em resumo: Os alunos que privilegiaram estratégias geométricas no desenvolvimento de actividades, de uma maneira geral, não omitiram o sinal quando determinaram o declive de rectas representativas de funções monótonas decrescentes uma vez que estes alunos visualizavam e associavam um certo movimento à recta exibida no ecrã do computador, verbalizando: "para um acréscimo de uma unidade nos xx, quanto é que o y decresce?"

Para a Cristiana, a determinação do declive de uma recta obedecia à aplicação de uma fórmula. De uma maneira geral, esta aluna era bem sucedida nessas resoluções analíticas, embora com as limitações de não dar grande atenção a outras características que a podiam alertar para situações incoerentes. Assim, por vezes, a Cristiana atribuiu declives positivos a funções monótonas decrescentes, ainda que verbalizasse que essas funções tinham declive negativo, manifestando não estabelecer conexões entre as noções matemáticas envolvidas.

Apresentamos um quadro resumo e comparativo das duas principais estratégias utilizadas pelos alunos no modo como relacionaram o declive de uma recta com a monotonia da função.

Quadro 5.2 — Relação entre declive e monotonia

Alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica	Alunos que privilegiaram uma estratégia analítica
• Relacionaram a situação real com a representação gráfica da função "declive positivo?... é quando é crescente. Declive negativo?... é quando a função é decrescente. É quando a bola vem a descer". Relacionaram o sinal do declive de uma recta com a monotonia da função.	• Referiram o valor do parâmetro **m** da equação y = mx + b para relacionar o declive da recta com a monotonia da função sem entenderem como é que o facto de **m** ser positivo ou negativo se manifestava na representação gráfica da função.

5.3. Conceito de declive de uma recta

Para além de perceber os processos utilizados pelos alunos na determinação do declive de uma recta a partir da sua representação gráfica, um outro objectivo desta experiência de ensino era compreender qual o conceito de declive construído pelos alunos. Parece-nos possível afirmar que os alunos demonstraram ter conceitos diferentes do declive de uma recta, que denominámos de conceito geométrico e de conceito analítico, de certa forma coerentes com as estratégias utilizadas na determinação do declive.

5.3.1. Conceito geométrico

Alguns alunos, quando se referiram ao declive de uma recta, evidenciaram ter construído um conceito que denominámos de geométrico. Nas suas respostas utilizaram elementos próprios da linguagem geométrica e sugeriram um esquema conceptual com imagens do declive de uma recta. Podemos afirmar que estes alunos associaram à palavra declive a imagem gráfica de uma recta num sistema de eixos cartesianos com uma certa posição caracterizada, na maioria dos casos, por um ângulo.

Entre os alunos que demonstraram possuir um conceito geométrico de declive podemos distinguir três categorias diferentes:

— Alunos que deram como sinónimo de declive a palavra "inclinação", tendo acrescentado uma referência ao eixo;

— Alunos que na definição de declive utilizaram a palavra tangente no sentido trigonométrico.

— Alunos que na definição de declive incluíram uma relação de dependência entre os incrementos das variáveis.

Na questão 2 da ficha I, perguntava-se do que é que dependia o declive de uma recta.

O Filipe afirmou que o declive de uma recta "depende do ângulo que a recta faz com o eixo dos xx", e acrescentou que "é por isso que quando a inclinação da recta é menor que 90º, o declive é positivo, quando é maior que 90º, o declive é negativo".

> L. Carlos: O declive de uma recta depende... ora bolas, não sei o que hei-de escrever aqui, eu sei bem como se calcula o declive, mas não sei o que devo escrever.
>
> Filipe: Então, o declive depende do ângulo que a recta faz com o eixo dos xx.
>
> Inv: Sim, com o semi-eixo positivo dos xx.
>
> Filipe: É por isso que quando a inclinação da recta é menor que 90º, o declive é positivo, quando é maior que 90º, o declive é negativo.
>
> L. Carlos: Agora é que eu não consegui acompanhar.

O Filipe desenhou, na ficha de trabalho, um círculo trigonométrico, traçou o eixo das tangentes, desenhou um ângulo do 1º quadrante e outro do 2º quadrante (figura 5.17). Assinalou no eixo das tangentes, os dois segmentos de recta e perguntou ao Luís Carlos:

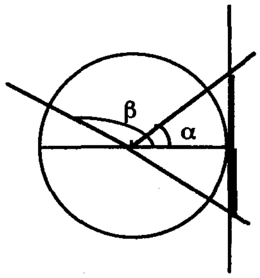


Fig. 5.16 - Esquema feito pelo Filipe para explicar o sinal do declive de rectas

> Filipe: Qual o sinal da tangente num caso e no outro?
>
> L. Carlos: Está bem, está bem. Já percebi.

Alguns alunos referiram-se ao declive de uma recta através de um esquema conceptual que incorporava a noção de tangente no sentido trigonométrico. Estes alunos mostraram identificar declive com uma característica especial do ângulo que a recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx. Mostraram, além disso, uma capacidade de síntese entre temas que estudaram separadamente — função afim e trigonometria.

Afirmava o Zé, tentando dar uma noção de declive "então o declive não é a tangente?"

O Luís Filipe, começou por dar uma definição de declive de uma recta fazendo referência à relação que existia entre os incrementos das variáveis. Afirmou que o declive era a razão entre o incremento de y e o incremento de x, e acrescentou que o declive da recta dependia da sua inclinação. Este aluno associou à palavra declive a imagem gráfica de uma recta em que se destacavam os incrementos das variáveis. O seu esquema conceptual demonstrou uma certa abstracção e complexidade no sentido em que supõe uma imagem dos incrementos das variáveis e da sua relação constante.

5.3.2. Conceito analítico

Alguns alunos demonstraram, nas suas afirmações, terem construído um conceito analítico de declive de uma recta, associando-lhe o parâmetro **m** da expressão $y = mx + b$. Estes alunos que definiram o declive como um número, na realidade o que fizeram foi explicar os procedimentos que utilizavam para o reconhecer. É uma resposta que supõe um esquema conceptual de tipo algorítmico, no sentido em que não explica o que é o declive mas como se obtém a partir de uma expressão analítica; além disso, acreditamos que os procedimentos citados de obtenção dos coeficientes não têm qualquer significado gráfico. É o esquema que corresponde ao aspecto mais escolar.

A Cristiana e o Paulo, embora trabalhando em grupo utilizaram, muitas vezes, estratégias diferentes no desenvolvimento de algumas actividades. A Cristiana manifestou, a maior parte das vezes, uma preferência pelo analítico, enquanto que o Paulo, como já foi referido, optava por uma resolução geométrica, como se pode ver pela passagem seguinte:

Prof: Então o declive da recta depende... do que é que depende o declive da recta? Escreveste que dependia da função. Mas de qual função? A função é uma recta.

Crist: Sim.

Prof: Então, do que é que depende o declive da recta? Depende dos pontos que estás a considerar?

Crist: Não.

Prof: Então depende de quê?

Crist: Não. Depende da expressão da função.

Prof: Está bem... depende da expressão da função. Mas o que é que da expressão da função tem importância? O que é que dá o declive?... [Apontando para uma recta exibida no ecrã do computador].

Paulo: Depende do ângulo.

Prof: Exacto. Do ângulo que ela faz com o eixo dos xx.

A Cristiana não ouviu, ou não deu importância à resposta dada pelo Paulo e confirmada pela professora.

> Crist: Então é aquele 2 da expressão.

A Cristiana identificava o declive de uma recta com o parâmetro **m** da expressão y = mx+b, sem, no entanto, perceber a influência desse parâmetro na inclinação da recta, como a própria aluna acabou por referir mais tarde:

> Crist: Às vezes estamos a decorar em vez de perceber. Por exemplo, em relação ao declive de uma recta, eu sabia que na recta y = 4x+2, o declive era 4, mas não percebia que isso ia ter influência na inclinação da recta. Não percebia que quanto maior fosse o número maior era a inclinação... A recta está mais a pique.

Esta aluna sabia de cor a definição de declive, o que não garantia a sua compreensão do conceito. O conceito de declive de uma recta parecia ter-lhe sido introduzido por meio de uma definição sem qualquer esquema visual — o coeficiente de x da equação y = mx + b.

Embora durante a experiência de ensino se tenha tentado que os alunos construíssem a noção de declive de uma recta a partir dos gráficos exibidos no ecrã do computador, nesta aluna parece ter permanecido uma definição analítica construída anteriormente. Manifestou algumas dificuldades em se libertar da fórmula e em construir um conceito geométrica de declive. O seu esquema conceptual manifestava uma faceta analítica desligada da noção geométrica do conceito. As suas respostas não eram apoiadas por qualquer representação gráfica. Mais tarde, a Cristiana percebeu que a abordagem gráfica tinha vantagens no desenvolvimento de muitas actividades e que era desejável o estabelecimento de conexões adequadas entre os dois tipos de abordagens.

Em resumo: Alguns alunos sugeriram possuir um esquema conceptual com imagens gráficas do declive de uma recta. Nas suas respostas, utilizaram elementos próprios da linguagem geométrica associando à palavra declive a imagem gráfica de uma recta num sistema de eixos cartesianos com uma certa posição caracterizada, na maioria dos casos, por um ângulo. Alguns alunos definiram declive como uma tangente, mostrando uma compreensão de que o declive é uma característica especial do ângulo que a recta faz com o semi-eixo positivo dos xx. Outros alunos definiram ainda o declive como uma relação de dependência entre os incrementos das variáveis.

A Cristiana parece ter aprendido uma série de regras sobre o declive de uma recta sem ter entendido o conceito e a sua relação com a inclinação da recta. Dizia a Cristiana: "em relação ao declive, eu sabia que na recta y = 4x+2, o declive era 4, mas não percebia que isso ia ter influência na inclinação da recta". Assim, esta aluna, continuou a associar à palavra declive, o parâmetro **m**, da fórmula y = mx+b.

Apresentamos um quadro resumo e comparativo do conceito de declive verbalizado pelos alunos.

Quadro 5.3 — Conceito de declive de uma recta

Alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica	Alunos que privilegiaram uma estratégia analítica
• Associaram à palavra declive a imagem gráfica de uma recta num sistema de eixos cartesianos com uma certa posição caracterizada na maioria dos casos, por um ângulo.	• Associaram à palavra declive o parâmetro **m** da expressão y = mx + b, sem perceberem qual a influência desse valor na inclinação da recta.

Resumo do capítulo: A análise das respostas dadas pelos alunos a tarefas que dizem respeito à noção de declive de uma recta levou a dados pormenorizados sobre o grau de compreensão atingido e as concepções mais comuns em relação a esse conceito.

O facto mais marcante que detectámos foi o de que os alunos utilizaram estratégias diferentes, ainda que, por vezes, seja difícil estabelecer bem a fronteira entre os tipos de estratégias utilizadas, na determinação do declive de uma recta, no modo como relacionaram o declive de uma recta com a sua monotonia e, consequentemente, no modo como definiram declive de uma recta.

A maioria dos alunos envolvidos nesta investigação utilizou uma estratégia que denominámos de*geométrica* na determinação do declive de uma recta. Assim: (a) falaram de declive como um indicador da inclinação da recta, demonstrando possuir alguma imagem gráfica na qual aparece a recta com uma determinada posição em relação aos eixos coordenados; (b) identificaram declive de uma recta com tangente trigonométrica, evidenciando uma concepção de que o declive é uma característica especial do ângulo que a recta forma com o semi-eixo positivo dos xx; (c) referiram uma relação de dependência entre os incrementos das duas variáveis. De uma maneira geral, referiram o incremento da variável dependente em função da variável independente "quando x aumenta 1, y aumenta 2", "quando x aumenta 2, y diminui 4". Estes incrementos não foram determinados como se se tratasse de números estáticos resultado de uma operação, mas como comprimentos de segmentos de recta associados a um determinado movimento das variáveis; e (d) desenharam um triângulo rectângulo em que os comprimentos dos catetos coincidiam com os valores absolutos dos incrementos das variáveis e determinaram o quociente entre esses valores.

Assim, estes alunos, na determinação do declive de uma recta, utilizaram elementos próprios da linguagem geométrica, demonstrando possuir uma componente visual bem desenvolvida. Utilizaram os gráficos como contexto privilegiado de resolução das questões e como argumentação e fizeram-no de uma forma dinâmica. Os seus apoios foram gráficos, diagramas, contagens e gestos. De uma maneira geral, estes alunos não partiram das regras, construíram-nas e utilizaram-nas como recurso ou como argumentação.

Em relação à determinação do declive de rectas paralelas ao eixo dos xx, estes alunos mostraram ter recorrido à imagem de uma recta horizontal para afirmarem que o seu declive era zero, por ser nulo o incremento de y. O declive de rectas paralelas ao eixo dos yy, causou uma certa perturbação a estes alunos que manifestaram uma certa dificuldade em falar de declives infinitos.

Os alunos que considerámos terem privilegiado uma estratégia analítica, na determinação do declive de uma recta: (a) recorreram à fórmula $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ou enunciaram a regra "final menos inicial a dividir por...", sem relacionarem esses procedimentos com qualquer tipo de imagem gráfica; (b) Referiram-se ao declive como um número, um coeficiente numérico dentro de uma expressão algébrica, o que supõe um esquema conceptual algorítmico, no sentido em que não explica o que é o declive mas como se obtém a partir de uma equação ou a partir da aplicação de uma fórmula, ou seja, resultado dos procedimentos que eles utilizavam para o reconhecer; e (c) os gráficos desempenheram um papel secundário no desenvolvimentos das actividades. Estes alunos, dos gráficos passavam rapidamente para as regras "tangente de 45° é igual a 1", ou seja recorriam a propriedades algébricas ou numéricas, e utilizavam-nas de uma forma estática. As suas traduções frequentes da representação gráfica para a representação analítica sugerem que estes alunos se sentiam mais confortáveis com símbolos do que com gráficos. Preferiam códigos verbais a imagens. Preocupavam-se com o rigor e com a precisão, e eram prudentes nos processos de resolução das questões. Manifestaram algumas limitações na capacidade de relacionar conceitos. Recorriam à memorização de regras e procedimentos que pareciam acreditar representarem a essência da Matemática. Contudo, no decurso da experiência de ensino, estes alunos foram construindo significado para o declive de uma recta através da análise das representações gráficas que não estavam desenvolvidos através de estudos apenas analíticos e procedimentais.

O estudo analítico no qual os alunos calculam simplesmente declives a partir de representações analíticas não fornecem um contexto rico de aprendizagem. A aprendizagem dos alunos baseada na adesão a regras e procedimentos nem sempre produzirão a compreensão que alguns professores pretendem dos seus alunos. Se fossem dadas aos alunos oportunidades para construírem conexões viáveis entre as representações gráficas e analíticas de funções as suas dificuldades cognitivas podiam não ser tão grandes.

Alguns alunos utilizaram simultaneamente estratégias geométricas e analíticas na determinação do declive de uma recta e que, neste estudo denominámos de estratégias mistas. Estes alunos mostraram possuir um equilíbrio entre as componentes visuais e analíticas. Conseguiram sintetizar informação gráfica e analítica para desenvolver algumas actividades. Os alunos que utilizaram estratégias mistas na determinação do declive de uma recta referiram que o declive era o seno sobre o coseno, que era a tangente [trigonométrica], por outro lado, falaram de quociente entre os incrementos das variáveis e, por vezes, recorreram também à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Por vezes, o mesmo aluno, em contextos diferentes, usou estratégias diferentes para determinar o declive de uma recta. Alguns alunos que optaram por uma determinada estratégia no desenvolvimento de determinadas actividades, mudaram de estratégia quando lhes pareceu que essa mudança lhes poderia facilitar a tarefa, demonstrando assim tratar-se de alunos versáteis. Outros alunos, por vezes, resolveram algumas actividades utilizando estratégias geométricas mas sentiram necessidade de recorrer a uma estratégia analítica, algumas das vezes para convencer o colega. Isto leva-nos a pensar que, de algum modo, estes alunos ou consideraram a estratégia geométrica inferior à estratégia analítica ou sentiram que era mais difícil argumentar a partir de considerações gráficas. Esta concepção pode ser devida, em parte, aos cursos de Geometria onde ver não é sinónimo de provar. Na Álgebra, a experiência visual pode ser extremamente importante como uma base sólida para a abordagem analítica.

Os alunos que privilegiaram estratégias geométricas no desenvolvimento de actividades, de uma maneira geral, não omitiram o sinal quando determinaram o declive de rectas representativas de funções monótonas decrescentes uma vez que estes alunos visualizavam e associavam um certo movimento à recta exibida no ecrã do computador, verbalizando: "para um acréscimo de uma unidade nos xx, quanto é que o y decresce?"

Os alunos que determinavam o declive por aplicação de uma fórmula, sem qualquer significado gráfico, não tiveram em conta características da função que podiam ter alertado para resultados incoerentes. Assim, por vezes, atribuíram declives positivos a funções monótonas decrescentes, ainda que verbalizassem que essas funções tinham declive negativo, manifestando, deste modo, não estabelecerem as conexões necessárias entre as noções matemáticas envolvidas.

Para além de perceber os processos utilizados pelos alunos na determinação do declive de uma recta, a partir da sua representação gráfica, um outro objectivo desta experiência de ensino era compreender qual o conceito de declive construído pelos alunos. Podemos afirmar que os alunos verbalizaram conceitos diferentes da palavra declive, coerentes com as estratégias utilizadas na sua determinação e que denominámos de conceito geométrico e de conceito analítico.

Os alunos que evidenciaram ter construído um conceito geométrico de declive de uma recta, utilizaram, nas suas respostas elementos próprios da linguagem geométrica e sugeriram um esquema conceptual com imagens gráficas do declive de uma recta. Estes alunos associaram à palavra declive a imagem gráfica de uma recta num sistema de eixos cartesianos com uma certa posição caracterizada, na maioria dos casos, por um ângulo. Entre estes alunos que demonstraram possuir um conceito geométrico de declive podemos distinguir três categorias diferentes: (a) alunos que deram como sinónimo de declive a palavra "inclinação", tendo acrescentado uma referência ao eixo; (b) alunos que na definição de declive utilizaram a palavra tangente no sentido trigonométrico; (c) alunos que na definição de declive incluíram uma relação de dependência entre os incrementos das variáveis.

Alguns alunos demonstraram, nas suas afirmações, terem construído um conceito analítico de declive de uma recta, associando-lhe o parâmetro **m** da expressão $y = mx + b$. Estes alunos que definiram o declive como um número, na realidade o que fizeram foi explicar os procedimentos que utilizavam para o reconhecer. É uma resposta que supõe um esquema conceptual de tipo algorítmico, no sentido em que não explica o que é o declive mas como se obtém a partir de uma expressão analítica. Além disso, os procedimentos citados de obtenção dos coeficientes parecem não ter qualquer significado gráfico.

Parece-nos importante sublinhar que, numa intervenção didáctica em que foi privilegiada uma abordagem gráfica das questões, uma aluna, a Cristiana, tenha continuado a mostrar uma certa preferência pela resolução analítica das questões.

Apresentamos um quadro resumo global e comparativo das duas principais estratégias utilizadas pelos alunos no estudo do declive de uma recta.

Quadro 5.4 — Resumo global das duas principais estratégias no estudo do declive

Alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica	**Alunos que privilegiaram uma estratégia analítica**
• Noção mais global do conceito de declive de uma recta. Conexões adequadas.	• Noção parcial dos conceitos. Confiança na memorização de regras. O conceito é o resultado da aplicação de uma fórmula.
• Raciocinam a partir das representações gráficas.	• Fraca capacidade para raciocinar a partir de representações gráficas. Regras e procedimentos definem e limitam a compreensão.
• Capacidade de reconhecer uma ideia implantada numa variedade de sistemas representacionais diferentes.	• Traduções da representação gráfica para a analítica sugerem que se sentem pouco confortáveis com gráficos.
• Conexões viáveis entre as representações gráficas e analíticas de funções.	• Dependência da resolução analítica, sem conexão com a representação gráfica.
• Alunos versáteis.	• Limitações em relacionar conceitos.

Capítulo 6

Derivada de uma função num ponto

Neste capítulo descrevem-se, analisam-se e interpretam-se os processos desenvolvidos pelos alunos no estudo da derivada de uma função num ponto — segundo objectivo específico deste estudo. Inicia-se com as estratégias utilizadas pelos alunos na determinação da derivada de uma função num ponto. Na segunda secção, apresentam-se algumas das dificuldades evidenciadas pelos alunos na determinação da derivada em pontos críticos. Por último, caracteriza-se o modo como os alunos verbalizaram o conceito de derivada de uma função num ponto, à luz das estratégias identificadas na primeira secção.

Tal como no capítulo anterior, a análise, interpretação e descrição dos dados que se apresentam neste capítulo incidiram, principalmente, sobre os *episódios de ensino* (Cobb e Steffe, 1983) realizados com três pares de alunos de duas turmas de 12º Ano, com a duração de um tempo lectivo cada, em aulas extra-lectivas e com recurso a ferramentas computacionais. Durante esses episódios, os alunos desenvolveram e discutiram as actividades que lhes foram propostas. O *corpus* da análise incluíu também outros dados provenientes de entrevistas não estruturadas a que esses alunos foram sujeitos, das notas e comentários que a investigadora registou no seu diário de investigação e das respostas dadas pelos alunos às fichas de trabalho.

6. Introdução ao estudo da derivada de uma função num ponto

A professora iniciou o conceito de derivada de uma função num ponto a partir da sua interpretação geométrica, isto é, recorreu à determinação do declive da recta tangente à curva nesse ponto, por pensar que este seria um processo que poderia ajudar os alunos a construir um conceito de derivada de uma função num ponto com um forte significado geométrico. Esta abordagem seguia de perto as primeiras actividades programadas para serem desenvolvidas com o apoio de ferramentas computacionais, nas quais os alunos podiam visualizar as sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente à curva no ponto, e uma tabela de valores dos respectivos declives aproximando-se de um valor fixo, o declive da recta tangente, ou seja, a derivada da função no ponto.

Assim, a professora começou por considerar uma curva semelhante à da figura 6.1. Sobre essa curva, marcou um ponto fixo que designou por P de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ e um ponto móvel Q de coordenadas $(x, f(x))$. Em seguida, chamou de razão incremental ao quociente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e recordou que esse quociente representava a tangente trigonométrica do ângulo ß (ângulo que a recta PQ faz com o semi-eixo positivo dos xx).

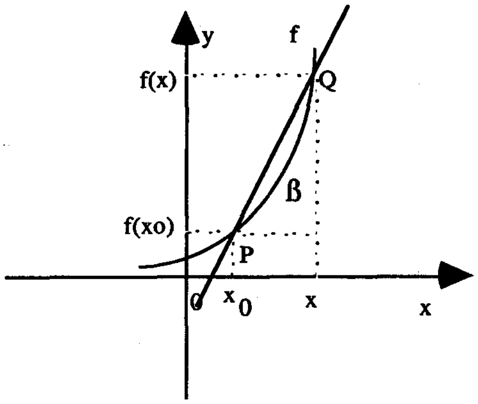


Fig. 6.1 - Esquema apresentado pela professora no quadro para introduzir o conceito de derivada de uma função num ponto

A professora chamou então a atenção para o facto de que se se considerasse que o ponto P se mantinha fixo e que o ponto Q se deslocava ao longo da curva, aproximando-se de P, as sucessivas rectas PQ iam alterando a sua direcção de modo que a tangente trigonométrica do ângulo ß passava, no seu limite, a dar o valor da derivada da função no ponto, que designou por $f'(x_0)$. Tomou como declive da curva no ponto P, o valor de $f'(x_0)$ e chamou tangente à curva no ponto P, à recta que "passa" por P e cujo declive é $f'(x_0)$. A recta tangente a uma curva num ponto foi, assim, definida como a posição limite das rectas secantes. Em seguida, definiu formalmente derivada de uma função num ponto como sendo o limite da razão incremental quando x tendia para x_0. A professora apresentou o conceito de derivada de uma função num ponto articulando noções geométricas e analíticas desse conceito.

As primeiras actividades a serem desenvolvidas com o apoio do programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus* (Parte C da ficha I) pretendiam que os alunos construíssem o conceito de derivada de uma função num ponto, através do processo dinâmico da visualização das sucessivas rectas secantes, movendo-se até à posição que parece indistinguível da recta tangente, e da observação de uma tabela dos declives dessas rectas, aproximando-se de um valor fixo, a derivada da função no ponto considerado.

Embora tenha sido feita uma descrição mais pormenorizada do funcionamento do programa de computador utilizado nesta intervenção didáctica (§4.3.), recordamos que a determinação da derivada de uma função num ponto, com o seu apoio, implica: (a) introdução da expressão analítica da função; (b) indicação da abcissa do ponto em que se pretende determinar a derivada (ponto fixo); e (c) indicação da distância a que, o primeiro ponto móvel a considerar sobre a curva, se encontra do ponto fixo.

6.1. Determinação da derivada de uma função num ponto

A análise e interpretação dos dados recolhidos mostraram que, tal como aconteceu na determinação do declive de uma recta, os alunos utilizaram estratégias diversificadas para determinarem a derivada de uma função num ponto, e que continuamos a denominar de estratégia geométrica e de estratégia analítica, ainda que, por vezes, não seja fácil estabelecer a sua fronteira. Na resolução de algumas questões, alguns alunos utilizaram ainda os dois tipos de estratégias e que, neste estudo, temos denominado de estratégias mistas.

Estabeleceram-se, assim, as categorias que constituem as três subsecções:

- Estratégia geométrica
- Estratégia analítica
- Estratégias mistas

6.1.1. Estratégia geométrica

A observação e análise das actividades desenvolvidas pelos alunos evidenciaram que a sua maioria manifestou uma estratégia que denominámos de geométrica na determinação da derivada de uma função num ponto. Nas suas respostas, estes alunos, utilizaram elementos próprios da linguagem geométrica sugerindo um esquema conceptual com imagens gráficas do conceito. Assim, tentaram traçar a recta tangente à curva representativa da função no ponto considerado (usando o computador ou traçando eles próprios a recta tangente) e, nos casos em que foi possível obter essa recta, determinaram o seu declive considerando o quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x, ou pensando na tangente trigonométrica do ângulo que a recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx.

6.1.1.1. Derivada de uma função num ponto a partir do declive da recta tangente à curva nesse ponto.

Como já referimos, o programa *A Graphic Approach to the Calculus* permite a determinação da derivada de uma função num ponto a partir do declive da recta tangente à curva representativa da função nesse ponto, e fá-lo de uma forma dinâmica. Os alunos, ao longo desta experiência de ensino, visualizaram, em várias funções, o movimento das rectas secantes aproximando-se da recta tangente e o valor dos respectivos declives exibidos numa tabela, ao lado do gráfico.

Alguns alunos utilizaram o mesmo tipo de estratégia quando, mais tarde, precisaram de determinar a derivada de algumas funções em determinados pontos, traçando eles próprios as rectas tangentes à curva representativa da função nesses pontos.

Em relação à questão 3 da ficha IV os alunos deviam indicar, por observação gráfica, um valor aproximado da derivada de cada uma das funções, no ponto x = 0 (figura 6.2).

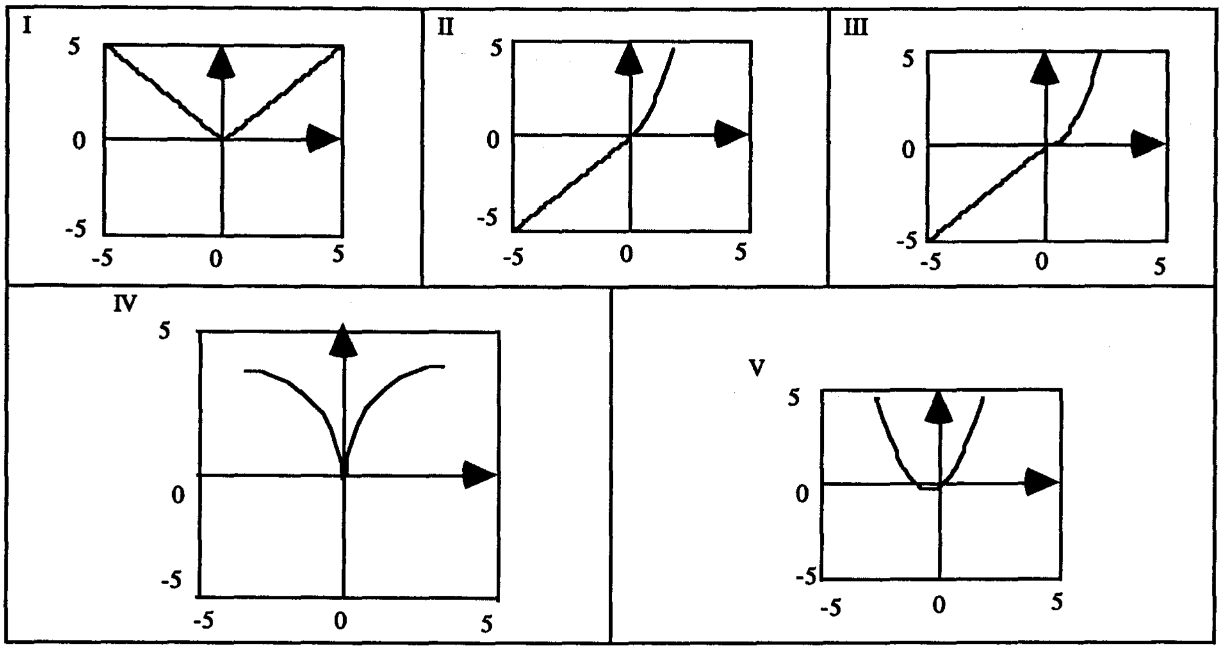


Fig. 6.2 - Gráficos da questão 3 da ficha IV

Em relação à função I, o Filipe afirmou que não existia derivada da função no ponto x = 0 por serem diferentes as suas derivadas laterais. Acrescentou que a derivada lateral direita da função nesse ponto era 1, uma vez que também era 1 o declive da recta e que à sua esquerda a recta tinha declive -1.

O Luís Carlos começou por afirmar que a derivada dessa função no ponto x = 0 era 0.

L. Carlos: A derivada no ponto x = 0 é 0.

Filipe: Zero?

L. Carlos: Não, não. Isso não é o vértice de uma parábola.

O Luís Carlos pensou naquele "bico" como se se tratasse do vértice de uma parábola. Assim, a sua resposta pode ser alvo de duas interpretações: (a) o aluno fez uma analogia imediata com o que se passa com a derivada no vértice de uma parábola que o aluno sabia, de experiências anteriores, tratar-se de um ponto de derivada nula; (b) o aluno imaginou a recta tangente ao gráfico da função no ponto x = 0, uma recta horizontal (tal como acontecia no vértice de uma parábola), devido a um conceito imagem de recta tangente a uma curva num ponto como aquela que a toca apenas nesse ponto, consequência do conceito de recta tangente a uma circunferência.

Por sugestão do Filipe, o Luís Carlos reflectiu um pouco mais na questão e acabou por concordar que não existia derivada da função no ponto, por serem diferentes as suas derivadas laterais.

Em relação à função V da mesma questão, o Luís Carlos e o Filipe traçaram uma recta tangente à curva no ponto de abcissa zero (figura 6.3) e determinaram um valor aproximado do declive dessa recta, considerando os incrementos de "1 x para 1 y".

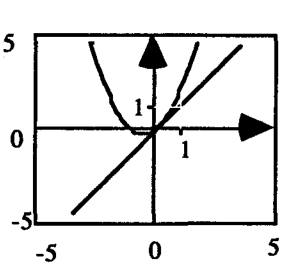


Fig. 6.3 - Gráfico V da questão 3 da ficha IV

Filipe: Esta aqui no ponto 0... é verdade.

L. Carlos: A [recta] tangente [tem declive] 1.

Filipe: É 1?

L. Carlos: Não é? Praticamente... 1 x para 1 y...

Filipe: A olho parece 1.

L. Carlos: É, é 1.

Filipe: Mas é a olho.

Estes dois alunos evidenciaram facilidade em determinar, graficamente, a derivada de uma função num ponto, a partir do declive da recta tangente à curva nesse ponto. O Luís Carlos continuou a manifestar a sua estratégia privilegiada de determinar o declive de uma recta determinando o incremento de y correspondente a um incremento unitário de x, tal como aconteceu nas actividades desenvolvidas por este aluno e analisadas no capítulo anterior.

Na questão 4, da ficha V pedia-se aos alunos que, sem efectuarem cálculos, determinassem a derivada de duas funções quadráticas traduzidas nas suas formas analítica e gráfica no ponto de abcissa 1(figura 6.4).

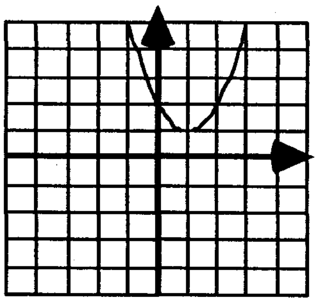
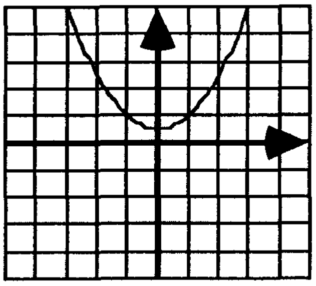
I $f(x) = x^2 - 2x + 2$	II $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
	

Fig. 6.4 - Gráficos da questão 4 da ficha V

O Luís Filipe, em relação à primeira função, afirmou de imediato, que a sua derivada no ponto x = 0 era 0, por ter imaginado uma recta horizontal tangente à curva nesse ponto, logo com declive nulo, ou por, em experiências anteriores, ter construído o conceito de que a derivada de uma função representada por uma parábola, no seu vértice, era nula.

L. Filipe: Mas, neste aqui [gráfico da segunda função] já...

Inv: Pense ...

L. Filipe: Bem, o que eu vejo logo é que [o declive] é maior do que zero, [a derivada] é positiva. É para ver assim, só no gráfico, sem fazer contas?...

Repare-se que o Luís Filipe associou, de imediato, derivada de uma função num ponto com declive da recta tangente à curva nesse ponto "o que eu vejo logo é que [o declive] é maior do que zero, [a derivada] é positiva". O Luís Filipe parece ter imaginado a recta tangente à curva no ponto e atribuiu-lhe declive positivo. Em seguida, traçou a recta tangente à curva nesse ponto e determinou o declive, considerando o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x.

L. Filipe: Dá ideia que é 1.

O aluno fez esta afirmação sem grande convicção. Os valores que tinha atribuído aos incrementos das variáveis não lhe ofereciam confiança. Por isso, recorreu ao computador. Lançou a expressão analítica da função e, a partir de opção própria do programa, verificou que o valor da derivada da função no ponto era, na realidade, 1.

Em relação a essa mesma questão, e uma vez que eram dadas as expressões analíticas das funções, a Cristiana e o Paulo recorreram, de imediato, ao computador para obterem, a derivada da função no ponto de abcissa 1.

Cris: Então temos que calcular pelo gráfico?

Inv: Sim. Veja lá se consegue ver pelo gráfico.

Cris: Faz lá tu, Paulo. [A Cristiana não fazia grande questão em usar o teclado].

Paulo: Deu zero.

Com esta questão, pretendia-se que os alunos traçassem, eles próprios, as rectas tangentes aos gráficos representativos das funções no ponto indicado e determinassem os respectivos declives. Por sugestão da investigadora, estes dois alunos seguiram essa estratégia em relação à função II (figura 6.4).

Inv: Tentem resolver a questão 4.2 sem usar o computador.

Paulo: [Traça a recta tangente e diz] O declive é um bocadinho mais do que 1.

Cris: Eu acho que é 1.

Esta resposta da Cristiana pode ter sido consequência de ter considerado que a inclinação da recta era de 45°, logo com tangente igual a 1. Embora neste diálogo a aluna não tenha explicitado essa concepção, foi uma constante ao longo desta experiência de ensino, a Cristiana referir que a tangente de um ângulo de 45° era 1, sempre que atribuía essa amplitude ao ângulo que a recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx.

O Paulo afirmou que era "um bocadinho mais do que 1", porque considerou o incremento de y levemente superior ao incremento de x.

Como já referimos, estes dois alunos, embora trabalhando em grupo, privilegiavam estratégias diferentes no desenvolvimento das actividades. Uma interpretação mais cuidada dos processos utilizados por estes dois alunos na realização desta tarefa pode levar-nos a algumas conclusões que podem ajudar a caracterizar as estratégias privilegiadas por cada um deles: a Cristiana parece ter utilizado uma regra, o Paulo fez um diagrama; a Cristiana apresentou um resultado com precisão, o Paulo falou num valor aproximado; para a Cristiana o gráfico desempenhou um papel secundário (serviu para observar que a recta fazia um ângulo de 45° com o semi-eixo positivo dos xx), o Paulo baseou a sua resposta apenas no gráfico.

Na questão 2 da ficha II pedia-se aos alunos que representassem graficamente a função $g(x)=\sqrt{x}$ e que determinassem g' (0), com a ajuda do computador.

O Luís Filipe utilizou no seu diálogo uma linguagem imbuída de conceitos geométricos. Associou a derivada da função no ponto x = 0 ao declive da recta tangente à curva nesse ponto. Observou, na tabela de valores que o computador lhe proporcionava, o grande aumento dos declives das sucessivas rectas secantes. Identificou o declive de uma recta com a tangente trigonométrica do ângulo que a recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx. Como se tratava de uma recta vertical, evocou o que tinha aprendido aquando do estudo da trigonometria.

> L. Filipe: [Lê o enunciado] *Determine, graficamente, a derivada no ponto zero.* Tenho que escrever que x = 0 [Ou seja, indicar 0 como ponto fixo]. Agora vamos fazer o *Plot*. [O computador traçou as várias rectas secantes e, a tabela exibia os respectivos declives]. Isto vai tender para $+\infty$. Está sempre a crescer...
>
> Zé: Sim...
>
> L. Filipe: Nunca chega [a ser $+\infty$] porque a tangente é a tangente [trigonométrica] de $\frac{\pi}{2}$ que não é definida. Não vês que a tabela dos valores do declive está a crescer muito? A tangente de $\frac{\pi}{2}$ não

está definida... A derivada é uma linha paralela ao eixo dos yy. A derivada é o próprio eixo dos yy. [O Luís Filipe falou em derivada como se fosse a recta tangente, em vez do declive dessa recta].

O Luís Filipe parece possuir um conceito imagem rico sobre a noção de derivada e sobre os conceitos que lhe estão associados mas expressou-se de uma forma confusa e utilizou um vocabulário pouco preciso, parecendo identificar derivada de uma função num ponto com recta tangente à curva nesse ponto, em vez do declive dessa recta.

Zé: Nunca chega a $+\infty$.[Afirma com convicção].

L. Filipe: [Manifestando algumas reservas] A derivada chega... Bem... a $+\infty$ nunca chega... mas a derivada... [O Luís Filipe traça na ficha de actividades o eixo dos yy].

O Luís Filipe, durante esta experiência de ensino, manifestou um certo receio em falar de derivadas infinitas. Esta concepção pode ser consequência deste aluno associar derivada ao declive da recta tangente e, como referimos no capítulo anterior, o Luís Filipe considerou que o declive de rectas paralelas ao eixo dos xx "não tinha significado, não existia".

Na questão 4 da mesma ficha, em que se pedia a derivada, no ponto x = 0, da função $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, o Luís Filipe continuou a utilizar uma estratégia geométrica para determinar essa derivada. Considerou um ponto móvel à esquerda de 0 e outro à direita, para obter, respectivamente, a derivada lateral esquerda e a derivada lateral direita da função nesse ponto.

L. Filipe: Se considerarmos o ponto móvel à esquerda, fazemos distância igual a -1. Para vermos o que acontece à esquerda. Dá também $+\infty$. No 4.3. [*Existe tangente à curva de f nesse ponto?*] não existe, porque a tangente de 0 não existe. A tangente de zero não, a tangente de $\frac{\pi}{2}$ é que não existe. Não existe pois a tangente de $\frac{\pi}{2}$ não é definida. O valor da derivada no ponto zero?... É $+\infty$ [Diz isto sem grande convicção].

Zé: Será que é zero a derivada?

O Zé, neste caso, parece ter associado derivada da função com o valor da função no ponto.

L. Filipe: Zero não, acho que é $+\infty$. À esquerda é $+\infty$ e à direita também logo é... Se à esquerda e à direita é $+\infty$..., então deve ser $+\infty$...

Foi com certo receio que o Luís Filipe afirmou que a derivada da função nesse ponto era $+\infty$. Todos os alunos participantes neste estudo manifestaram alguma relutância em falar de derivadas infinitas, em perfeita coerência com o que tinha acontecido aquando da determinação do declive de rectas verticais.

Em resumo: Todos os alunos envolvidos nesta experiência de ensino conseguiram determinar a derivada de uma função num ponto utilizando uma estratégia que denominámos de geométrica. Assim, começaram por associar derivada de uma função num ponto ao declive da recta tangente à curva nesse ponto. Traçaram eles próprios essa recta e determinaram o seu declive. Nalgumas actividades, sobretudo naquelas em que era dada a expressão analítica da função, alguns alunos utilizaram o computador ou para obter o valor da derivada ou para verificarem valores que eles tinham determinado mas que lhes ofereciam algumas dúvidas. Mesmo a Cristiana, a aluna que durante esta experiência de ensino se destacou na preferência por estratégias de resolução analíticas, por vezes, fez algum esforço para acompanhar as estratégias geométricas utilizadas pelos colegas ou sugeridas pelas próprias actividades.

6.1.1.2. Determinação da derivada de uma função num ponto a partir do gráfico da sua função derivada.

Todas as actividades da ficha III envolviam a determinação da derivada de algumas funções em determinados pontos a partir do gráfico da função derivada. A partir da expressão analítica de cada função e recorrendo ao computador, os alunos podiam obter a sobreposição dos gráficos da função e da sua função derivada. Em seguida, deviam utilizar o gráfico da função derivada para obterem a derivada da função em determinados pontos. Esta ficha de trabalho tinha como principais objectivos que os alunos: visualizassem o modo como o programa traçava o gráfico da função derivada (determinava o declive das rectas tangentes à curva representativa da função em vários pontos); compreendessem a derivada como uma função; utilizassem essa função derivada para determinar a derivada da função nos pontos pedidos. Alguns alunos não desenvolveram esta ficha com muito entusiasmo. Todas as actividades versavam o mesmo assunto o que desmotivou um pouco aqueles alunos que gostavam de actividades que desafiassem. Por outro lado, a leitura de valores não foi tarefa fácil, devido à escala que o programa proporciona.

Para desenvolver essas actividades, os alunos recorreram ao gráfico da função derivada, para "lerem" as ordenadas dos pontos em que se pedia a derivada, mesmo quando a derivação da expressão analítica da função, pelas regras, se mostrava imediata. Quando sentiram dificuldade em efectuar essas leituras, recorreram à expressão analítica da função derivada.

Nesses casos, mesmo os alunos que privilegiavam estratégias geométricas de resolução das questões, enveredaram por utilizar estratégias analíticas como recurso, ou como argumentação.

A primeira função considerada nessa ficha era $f(x) = x^2$.

O Luís Filipe e o Zé obtiveram, no ecrã do computador, os gráficos da função e da sua função derivada e, a partir de leituras de valores neste último gráfico, tentaram responder às questões.

> L. Filipe: f' (0)... o f' (0) não é zero. É 0 vírgula qualquer coisa.
>
> Prof: Achas que é 0 vírgula ..?
>
> L. Filipe: Pelo menos é o que parece. Está acima do zero...
>
> Prof: Eu acho que é zero.
>
> L. Filipe: Está bem. Mas não me parece bem. f' (-2) é -3. Bem... não sei bem se é -3... mas é aquilo que me parece.
>
> Zé: Bem... isso é se tu estiveres a ver assim, não é? [E aponta no computador].

Os alunos tentaram ser o mais rigorosos possível nas leituras. Pouco a pouco, libertaram-se da necessidade de obter, como resultado, valores inteiros e começaram a manifestar mais confiança na resolução das tarefas propostas.

A Cristiana, uma aluna que, como temos vindo a sublinhar, manifestou ao longo desta experiência de ensino privilegiar estratégias analíticas no desenvolvimento das actividades, tentou utilizar os gráficos representados no ecrã do computador para responder a esta mesma questão, mas deparou-se com algumas dificuldades.

> Crist: Nós temos que dizer quanto valem estas derivadas. Estava a ver se aparecia aqui o valor [escrito] no computador. Ou será que temos que ver pelo gráfico? Achas que é fazer isso? Mas, como é que a gente vê isso? Espera que eu vou perguntar à *Stora*. *Stora*? Temos que ver isto pelo gráfico?

A Cristiana, queria cumprir com o que era proposto mas manifestava muita insegurança na leitura e interpretação de gráficos. Reconhecia que a tarefa de "ler" e "interpretar" gráficos não a entusiasmava, pelo que se mostrava muito dependente da opinião da professora ou da investigadora. Parecia não identificar de forma adequada a relação existente entre os gráficos da função e da função derivada.

Inv: Se já tem o gráfico da função derivada, para calcular f'(0)....

Paulo: [Apontando com o dedo no gráfico da função derivada exibido no ecrã do computador] É 0.

Crist: Pois. É 0. Está bem. Agora já percebi. f'(-2) .... É -∞.

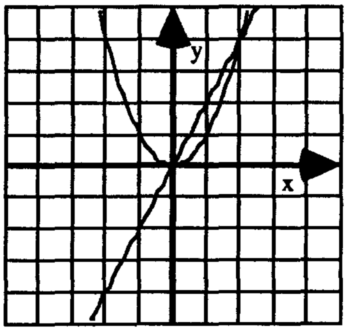


Fig. 6.5 - sobreposição dos gráficos da função $f(x) = x^2$ e da sua função derivada exibido no ecrã do computador

A Cristiana concordou com a resposta dada pelo Paulo mas, como no ponto x = 0, o gráfico da função coincidia com o gráfico da função derivada (figura 6.5), a Cristiana não percebeu em qual dos gráficos é que o Paulo tinha feito a leitura.

Quando a Cristiana respondeu que f'(-2) = -∞ colocou o dedo sobre o ponto de coordenadas (-2, 0) e subiu com o dedo na vertical como se estivesse a traçar secantes. A figura 6.6 tenta mostrar as semi-recas que a Cristina traçou com o dedo.

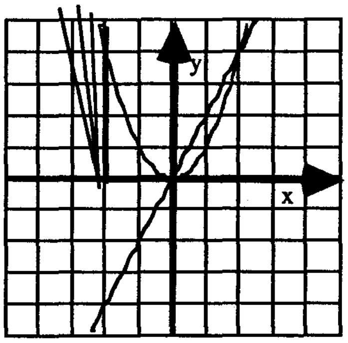


Fig. 6.6 - Esquema dos gestos da Cristiana para determinar a derivada da função no ponto de abcissa -2

Esta aluna parece não ter associado a recta ao gráfico da função derivada, ou seja, não percebeu que, para responder à questão, bastava ler, nesse gráfico, a ordenada do ponto correspondente ao ponto de abcissa -2. Além disso, como nas actividades anteriores, para determinar a derivada de uma função num ponto, era necessário traçar rectas secantes aproximando-se da recta tangente à curva, a Cristiana seguiu um esquema semelhante mas sem qualquer noção de qual era, nesse caso, o ponto fixo.

O Paulo, não percebeu a resposta apresentada pela Cristiana. Colocou o dedo sobre o ponto de coordenadas (-2, 0) e desceu até encontrar a recta que representava a função derivada. Olhando para a Cristiana, disse:

Paulo: No ponto -2?...

Crist: O -2 está aqui.

Paulo: Não. Dá -4. [Descreve com o dedo o mesmo segmento de recta].

Crist: Mas como é que tu sabes que dá -4?

Inv: Paulo, tente explicar à Cristiana porque é que é -4.

Paulo:[Aponta de novo no computador e diz] Onde é que vai encontrar esta recta?

Crist: Sim, sim. Já vi. Então f' (2)... f' (2).... Então é 5... [Faz um movimento na vertical com o dedo, partindo do ponto de coordenadas (2, 0), até encontrar a recta que representa a função derivada].

Paulo: É 4.

Inv: Onde é que vai à procura? É até encontrar a linha branca, Cristiana.

Crist: Pois é. É 4. Então f'(1)...

A Cristiana colocou a caneta na vertical sobre o ecrã do computador, passando pelo ponto de coordenadas (1, 0) e tentou encontrar o ponto de intersecção com a recta que representava a função derivada, e disse:

Crist: Eu acho que é 2.

Paulo: Não sei se será mesmo 2.

A Cristiana colocou de novo a caneta, primeiro na vertical e depois na horizontal. O Paulo tentou ajudar colocando a ficha sobre o ecrã, na vertical, passando pelo ponto de abcissa 1 para ver se era mais fácil encontrar o ponto de intersecção.

Crist: É a branca, não é? [E coloca a caneta na horizontal, partindo do ponto onde a ficha do Paulo encontra a recta]. Eu acho que é 2.

O Paulo não estava muito convencido e continuava a colocar a folha, ora na vertical, ora na horizontal para ver se, na realidade, o valor era 2.

Paulo: A gente não pode ir buscar aquela tabela de valores?

Crist: Não, nesta opção não. Eu acho que é 2. E isto até bate certo. O f'(0) é 0, o f'(2) é 4, então o f'(1) deve ser mesmo 2, porque um é o dobro do outro.

A Cristiana tentou encontrar uma maneira de convencer o Paulo. Apresentou então um argumento que fez apelo a uma noção de proporcionalidade para justificar que o valor determinado graficamente estava correcto mas, como esse argumento não convenceu o Paulo, a Cristiana retomou a leitura do gráfico.

Crist: Não estás a ver mesmo que é 2, Paulo? [Aponta de novo com a caneta]. Vá lá Paulo, toma nota dos resultados na ficha para passarmos à frente.

A Cristiana começava a mostrar sinais de alguma impaciência, perante o descontentamento do Paulo. De sublinhar, no entanto, que estes dois alunos não apresentaram qualquer indício de tentar fugir à questão recorrendo às regras de derivação. Queriam resolver graficamente a questão e o envolvimento que manifestaram parece tê-los feito esquecer qual era a expressão analítica da função com que estavam a trabalhar.

Crist: Vamos lá. Temos que continuar. Podes escrever diferente daquilo que eu escrevi, não és obrigado a concordar comigo...

Inv: Mas afinal qual é o problema?

Paulo: É no 1.

Crist: É no 1 e no -1.

Inv: Quando x é -1, dá ideia que é -2. [Coloca a folha sobre o ecrã].

Crist: E quando x é 1, dá 2.

Inv: É mais ou menos aqui, não é? Então qual é a ordenada deste ponto?

Crist: É 2.

Estes alunos respondem às duas questões seguintes, em que se pedia a derivada da função em alguns pontos a partir do gráfico da função derivada, seguindo o mesmo esquema de colocarem uma caneta na horizontal e outra na vertical para mais facilmente lerem as ordenadas nos pontos. Pouco a pouco, foram mostrando uma maior flexibilidade e confiança nas leituras de valores no gráfico.

Para determinar a derivada da função $g(x) = (x - 1)^3 + 2$ em alguns pontos, a partir do gráfico da sua função derivada, o Luís Filipe e o Zé continuaram a tentar utilizar a mesma estratégia de "ler" ordenadas dos pontos, utilizando o gráfico da função derivada exibido no ecrã do computador. Uma vez mais, essa leitura não foi fácil de efectuar, o que levou estes alunos, a "aspirar" pela expressão analítica da função derivada ou a sentir necessidade de recorrer a outra opção do programa que lhes dava, directamente, a derivada da função no ponto.

L. Filipe: A derivada é a linha branca. Deve ser para aí 3 [g' (0)].

Zé: Não...

L. Filipe: Deve ser 3.

Zé: Não é nada. É 2,5.

L. Filipe: Está bem. Seja então 2,5. g'(1) = 0; g'(2) = ... também tem que ser 2,5. Então é porque isto está mal. Se o gráfico tivesse aqui umas linhas, era mais fácil a leitura.

Zé: Podemos colocar linhas.

L. Filipe: Vamos ver às Options, e vamos alterar.

Zé: Afinal ficou na mesma. Não deve ser possível.

L. Filipe: Não interessa, a gente vai lá. Se conseguissemos encontrar a expressão da função derivada... Tornava-se muito mais fácil.

O Luís Filipe que era um aluno que gostava de "ler" gráficos, e que se manifestou, ao longo de toda a intervenção didáctica, como um aluno que privilegiava estratégias geométricas no desenvolvimento das actividades, não confiava plenamente naquelas leituras e já aspirava pela expressão analítica da função derivada. Contudo, não desistiu perante a primeira dificuldade com que se deparou "Não interessa, a gente vai lá". Para confirmarem os valores, o Luís Filipe e o Zé recorreram a outra opção do programa que permite determinar a derivada de uma função num ponto.

O Luís Carlos e o Filipe, em relação a essa mesma questão, utilizaram o mesmo tipo de estratégia, sem se preocuparem com a determinação de valores exactos.

L. Carlos: Na função branca, que é a função g', é mais ou menos 3.

Inv: E g' (1) ?

L. Carlos: Vá lá Filipe. Quanto é g' (1)?

Filipe: É zero.

L. Carlos: E g' (2)? Bem eu escrevo o sinal de aproximadamente igual.

O Luís Carlos sentiu que o Filipe estava um pouco distante e interpelou-o, não para obter uma resposta que ele certamente também conhecia, mas para o obrigar a continuar a ser um companheiro de descoberta.

Na questão 3 da ficha III, pedia-se a representação gráfica da função $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$, e a indicação da derivada da função em determinados pontos, a partir do gráfico da sua função derivada.

Zé: O f'(3) também dá zero?

L. Filipe: Dá. Basta olhares para lá. A derivada do vértice de uma parábola é zero.

Zé: f(1) = 0, pela mesma razão.

O Luís Filipe não se limitou a olhar para o gráfico da função derivada. Observou o gráfico da função e como o ponto 3 era um minimizante sem ser um bico (o vértice de uma parábola) o aluno parece ter imaginado uma recta horizontal, tangente à curva nesse ponto, por isso confirmou que era zero a derivada da função no ponto, evidenciando um bom domínio da interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto.

Como acabámos de descrever, os alunos, de uma maneira geral, utilizaram o gráfico da função derivada exibido no ecrã do computador para determinar a derivada da função nos pontos pedidos. Contudo, alguns desses alunos, não se limitaram a efectuar simples leituras de gráficos. Recorreram, sempre que possível, às simetrias do gráfico da função derivada, o que lhes facilitou algumas dessas leituras. Os alunos utilizaram uma propriedade geométrica — a simetria para desenvolver estas actividades.

L. Carlos: Na função branca, que é a função g'... g'(0) é mais ou menos 3. E g' (2)?... Bem, eu escrevo o sinal de aproximadamente igual.

Inv: Está bem.

L. Carlos: g' (2) há-de ser também 3, outra vez.

Inv: Porquê? Porque é que há-de ser 3?

A investigadora, sempre que julga oportuno, questiona os alunos no sentido de os ajudar a explicitar as suas ideias.

Filipe: Porque é uma função...

L. Carlos: Quadrática.

Filipe: Como é que se chamava?...

Inv: Uma parábola.

Filipe: Sim, uma parábola. Com tantos nomes, já me esqueci deste. Então, como é uma parábola... ela é simétrica em relação ao eixo de simetria.

Inv: E qual é o eixo de simetria?

Filipe: x=1. Então g' (0) e g' (2) têm que ter o mesmo valor.

...

L. Carlos: Se em 0 é 2,5 e em 1 ela é 0... portanto é o vértice da parábola, então em 2 tem que ser 2,5 também.

Estes alunos, perceberam que para determinar a derivada de uma função num ponto a partir do gráfico da sua função derivada, bastava ler ordenadas de pontos. No entanto, não se limitaram a fazer simples leituras, interpretaram adequadamente o gráfico. Uma vez que se tratava de uma parábola, recorreram à simetria existente nesse tipo de gráfico o que lhes facilitou a tarefa. Assim, estes dois alunos manifestaram um comportamento não rotineiro no desenvolvimento das actividades e a capacidade de estabelecer conexões necessárias e adequadas à realização de cada uma das tarefas.

O Luís Filipe também recorreu, por vezes, à simetria dos gráficos para obter a derivada de algumas funções em determinados pontos.

Em resumo: Nas actividades em que se pedia aos alunos que indicassem o valor da derivada de uma função em determinados pontos, a partir da observação do gráfico da sua função derivada, todos os alunos acabaram por utilizar uma estratégia de "ler" a ordenada dos pontos no gráfico da função derivada. Alguns alunos, por vezes, depararam-se com dificuldades ao efectuar essas leituras mas, confiantes na sua estratégia de resolução, optaram por recorrer, por iniciativa própria, a valores aproximados. Outros alunos sentiram-se pouco confortáveis com as leituras feitas e recorreram a outra opção do programa para determinarem, com exactidão, a derivada da função nesses pontos. De referir ainda que alguns dos alunos que privilegiaram, ao longo desta intervenção didáctica, estratégias geométricas de resolução das questões, evocaram as simetrias do gráfico da função derivada, o que lhes evitou algumas leituras.

6.1.2. Estratégia analítica

Como já referimos, todos alunos que participaram nesta experiência de ensino, com mais ou menos ênfase, acabaram por utilizar uma estratégia que denominámos de geométrica na determinação da derivada de uma função num ponto. Aliás, os gráficos desempenhavam um papel principal em todas as actividades propostas, pelo que, mesmo aqueles alunos que privilegiavam estratégias analíticas de resolução das questões, acabaram por aderir uma vez ou outra a esse tipo de estratégia.

Os alunos que considerámos privilegiarem estratégias analíticas no desenvolvimento das actividades, utilizaram nas suas respostas elementos próprios de uma linguagem que podemos denominar de analítica. Por vezes, sentiram necessidade de recorrer à tradução entre a representação gráfica e a representação analítica, aplicaram regras, fórmulas e teoremas como base de resolução das questões. Manifestaram pouca confiança nos métodos gráficos de resolver as questões, mesmo quando esses métodos tornavam a solução mais fácil. Pareciam estar mais habituados, de anos anteriores, a desenvolver actividades sobre derivadas, de uma forma mais analítica e, até certo ponto, "divorciada" de sua interpretação geométrica.

6.1.2.1. Determinação da derivada de uma função num ponto a partir do declive da recta tangente à curva nesse ponto.

Vamos começar por apresentar um exemplo em que a mesma actividade é desenvolvida por dois alunos, o Luís Filipe e a Cristiana, utilizando estratégias diferentes.

Na questão 3 da ficha VI, afirmava-se que o Carlos tinha lançado verticalmente, de baixo para cima, uma bola e que a altura **h**, em metros, atingida pela bola **t** segundos após o lançamento era dada pela equação $h = 16t - 4t^2$. Pedia-se aos alunos que determinassem o instante em que a recta tangente à curva representativa da função era horizontal e perguntava-se durante quanto tempo as tangentes à curva tinham declive positivo e ainda se as tangentes à curva tinham declive negativo.

Para resolver a questão, o Luís Filipe traçou o gráfico de uma parábola com a concavidade voltada para baixo e foi observando esse esboço para responder às questões. A Cristiana seguiu uma estratégia analítica. Derivou a expressão e igualou a zero para determinar a abcissa do ponto em que a tangente à curva era horizontal. Em seguida, para verificar durante quanto tempo as tangentes à curva tinham declive positivo e durante quanto tempo tinham declive negativo, resolveu as inequações $16 - 8t > 0$ e $16 - 8t < 0$.

L. Filipe: Dá-te $t = 4$? A mim dá-me $t = 2$.

Crist: Tens razão.

L. Filipe: Derivaste mal? [Lê a questão 3.2]. Declive positivo... é quando é crescente.

O Luís Filipe observou o gráfico e estabeleceu uma conexão adequada entre o sinal do declive e monotonia da função. A Cristiana resolveu a inequação $16 - 8t > 0$.

Crist: É $t < 2$. Ou seja é entre 0 a 2 seg, intervalo aberto.

L. Filipe: Entre 0 e 2 segundos? Pois é, quando chega ao 2...

Crist: O declive é nulo... Portanto no 2 o intervalo tem que ser aberto.

L. Filipe: Depois de chegar ao 2 começa a decrescer mas pode não... pode depois voltar a crescer. Querem saber quando a tangente à curva tem declive positivo. É quando a derivada é positiva, não é?

Crist: É. Portanto não é a derivada...

L. Filipe: É quando isto é crescente. É isso. Eu estava a ver... Agora declive negativo...

Inv: Durante quanto tempo as tangentes à curva têm declive positivo?

Crist: 2 s.

Inv: Exacto. As tangentes à curva terão declive negativo?

L. Filipe: É quando a função é decrescente. É quando a bola vem a descer.

Crist: É quando $t > 2$ s.

Uma vez mais, o Luís Filipe observou o gráfico e relacionou a resposta com a situação real: "É quando a bola vem a descer". A Cristiana resolveu outra inequação $16 - 8t < 0$.

Inv: Exacto. É mesmo quando a bola vem a descer. Mas ela chega ao solo quando?

Crist: Então pomos entre 2 e 4.

L. Filipe: Porque o t só vai estar definido entre 0 e 4, momento em que [a bola] toca no chão.

Como já foi referido, a questão 4 da ficha VIII era semelhante à questão 3 da ficha VI. Faltava-lhe o contexto real. A Cristiana, seguiu uma estratégia idêntica à anterior para resolver esta questão. Derivou e igualou a zero a expressão para determinar a abcissa do ponto em que a tangente à curva era horizontal. Em seguida, para verificar quando é que as tangentes à curva tinham declive positivo e quando é que tinham declive negativo, resolveu as inequações $16 - 8x > 0$ e $16 - 8x < 0$. Como parecia estar a aplicar fórmulas sem apelar ao aspecto gráfico da questão, quando resolveu a inequação 16 - 8x > 0, obteve um resultado incorrecto (x > 2) e deu como resposta esse valor sem qualquer associação ao gráfico representativo da função, que poderia ter chamado a atenção para o seu engano.

Na questão 3 da ficha IV eram apresentados cinco gráficos de funções e pedia-se aos alunos que indicassem, por observação gráfica, um valor aproximado da derivada de cada uma das funções no ponto x = 0. Com esta questão pretendia-se que os alunos traçassem, se necessário, as sucessivas rectas secantes até obterem a recta tangente ou as semi-tangentes à curva no ponto para, em seguida, determinarem um valor aproximado dos declives.

Alguns alunos, tentaram encontrar as expressões analíticas dessas funções.

Em relação à função quadrática representada na figura 6.7, a Cristiana e o Paulo traduziram a representação gráfica da função na sua representação analítica. Identificaram graficamente os dois zeros da função (x = 0 e x = -1), escreveram a expressão y = x(x+1), manifestando um certo domínio na tradução gráfico —> expressão analítica.

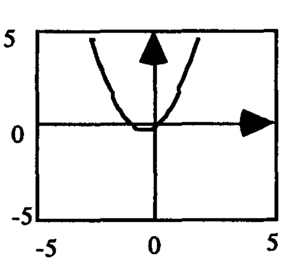


Fig. 6. 7 - Gráfico da função V da questão 3 da ficha IV

Não se preocuparam com a abertura da parábola. Introduziram essa expressão no computador e, a partir de opção própria do programa, determinaram a derivada da função no ponto x = 0.

Na questão 1 da ficha VI afirmava-se que o espaço percorrido por um móvel, em função do tempo, era dado pela função s(t) = 5t + 2. Pedia-se aos alunos que justificassem que a velocidade média do móvel era constante em qualquer intervalo de tempo. Perguntava-se, ainda, qual a relação que existia entre as velocidades média e instantânea.

Alguns alunos fizeram conexões adequadas entre a Matemática e a Física. Sabiam que a velocidade era a derivada do espaço em ordem ao tempo, e justificaram que, naquele caso, a velocidade era constante porque "ia dar uma recta, com o declive sempre igual". A Cristiana passou de imediato a falar em derivadas, e associou a derivada da função ao coeficiente do termo de primeiro grau.

Crist: Isto é Física. Isto é para derivar? Óh *stora*, isto deriva-se? Isto deriva-se porque a velocidade é [escreve] $\frac{d_s}{d_t}$. $v = \frac{d_s}{d_t} = 5$ m / s. A velocidade é a derivada em ordem ao espaço. Não, a derivada do espaço em ordem ao tempo. Então aqui é 5, portanto vai ser sempre isto, vai ser constante.

A Cristiana parece não ter evocado qualquer imagem gráfica para responder à questão. Ela sabia das aulas de Física que a velocidade (sem especificar que tipo de velocidade) era "a derivada em ordem ao tempo", sabia também que numa equação do tipo $y = ax+b$, o parâmetro **a** representava a derivada e, desse modo, concluiu que a velocidade era constante e igual a 5.

6.1.2.2. Determinação da derivada de uma função num ponto a partir da função derivada.

Na questão 1 da ficha III pedia-se aos alunos que, recorrendo ao computador, representassem, graficamente, as funções $f(x) = x^2$ e a sua função derivada. Em seguida, pedia-se que, apenas por observação do gráfico da função derivada, determinassem a derivada da função em determinados pontos. Alguns alunos revelaram uma certa dificuldade em perceber que, para desenvolver esta actividade, bastava "ler" ordenadas de pontos num gráfico. Os alunos não estavam habituados, de anos anteriores, a desenvolver este tipo de actividades. Tarefas mais "habituais" eram aquelas em que, a determinação da derivada de uma função num ponto, "exigia" os seguintes passos: calcular, a partir das regras de derivação, a expressão analítica da função derivada; substituir, nessa expressão, a variável, pela abcissa do ponto no qual se pretendia calcular a derivada da função. Assim, para desenvolver esta actividade, alguns alunos encontraram a expressão analítica da função derivada e utilizaram essa expressão para determinar a derivada da função nos pontos pedidos.

Em resumo: Alguns alunos utilizaram uma estratégia que denominámos de analítica para determinarem a derivada de uma função num ponto. Viram-se confrontados com as seguintes tarefas: descobrir a expressão analítica da função (nos casos em que esta não lhes era dada); derivar essa expressão, através das regras de derivação; substituir, na expressão analítica da função derivada, a abcissa do ponto em que se pretendia determinar a derivada da função. Estes alunos, pareciam considerar os gráficos como uma representação de importância secundária e, por vezes, preferiam memorizar fórmulas e técnicas algébricas, que pensavam dar-lhes mais sucesso.

6.1.3. Estratégias mistas

Tal como aconteceu na determinação do declive de uma recta, alguns alunos utilizaram simultaneamente estratégias geométricas e analíticas na determinação da derivada de uma função num ponto e que denominámos de estratégias mistas. Estes alunos conseguiram sintetizar informação gráfica e analítica para resolver algumas das actividades propostas, evidenciando um bom equilíbrio entre as componentes visuais e analíticas. Evidenciaram uma flexibilidade nas estratégias utilizadas de acordo com a situação. Esta flexibilidade pode ser consequência de um ensino que encoraja os alunos a explorar, formular e testar conjecturas, e discutir os resultados das suas investigações.

6.1.3.1 Determinação da derivada de uma função num ponto a partir do declive da recta tangente à curva nesse ponto.

Na questão 2 da ficha II pedia-se aos alunos que representassem graficamente a função $g(x)=\sqrt{x}$ e que determinassem a sua derivada no ponto $x = 0$.

O Filipe e o Luís Carlos desenvolveram esta actividade estabelecendo conexões adequadas entre as estratégias geométricas e analíticas. Por um lado, identificaram derivada de uma função num ponto como o declive de uma recta (associado à tangente trigonométrica de um ângulo), por outro lado, associaram a palavra derivada ao coeficiente **m** da equação $y = mx+b$.

> Filipe: A derivada [no ponto $x = 0$] não existe.
>
> L. Carlos: Não, a recta [tangente], a recta, vai ser o eixo dos ...
>
> Filipe: O declive é igual à tangente [trigonométrica]. A tangente de $\frac{\pi}{2}$ é $+\infty$.
>
> L. Carlos: Então $f'(0) = +\infty$.
>
> Inv: Porque é que o Filipe estava a dizer que não existia?
>
> Filipe: Considerando que $+\infty$ não é um valor finito. Não posso dizer que o declive é $+\infty$, porque se depois vou pegar no $y = mx + b$... não consigo fazer nada com o **m**.
>
> Inv: Podemos considerar que a recta tangente à curva no ponto zero coincide com o próprio eixo dos yy.
>
> Filipe: É a recta $x = 0$.

O Filipe demonstrou possuir uma rica compreensão do processo de determinar a derivada de uma função num ponto e conseguiu fazer uma síntese adequada da compreensão gráfica e analítica. Ao longo de toda a experiência de ensino, este aluno conseguiu olhar para as actividades utilizando lentes diferentes. Conseguiu fazer um intercâmbio dinâmico entre a Geometria e a Álgebra, para desenvolver as actividades propostas.

Na questão 2 de ficha III pedia-se a derivada de uma função em vários pontos, a partir do gráfico da função derivada. Alguns alunos, por dificuldade de leitura das ordenadas desses pontos no gráfico da função derivada, recorreram ao que tinham aprendido em aulas anteriores utilizando a outra opção do programa para obterem o declive da recta tangente à curva nesses pontos.

> Zé: Mas como é que nós temos a certeza que isto está certo?
>
> L. Filipe: Então, porque é que não fazemos aquilo que fazíamos nas fichas anteriores? Vamos calcular a derivada no ponto zero. Ou seja, consideramos o ponto fixo $x = 0$ e podemos começar com uma distância de 1, para começar a traçar as secantes.
>
> L. Filipe: Estás a ver que a derivada no ponto zero afinal não é 2,5 mas sim 3.
>
> Zé: Sim. Custou, mas chegámos lá.
>
> L. Filipe: Já agora, vamos também verificar o g'(1), para ver se dá zero.
>
> Inv: Estão a trabalhar com uma distância muito pequena. Por isso, é que obtiveram logo o valor zero. Em vez de começarem com rectas secantes, apareceu logo a recta tangente no ponto e o respectivo declive.

A investigadora acompanhava de perto o trabalho dos alunos e, sempre que julgava oportuno, tentava que os alunos reflectissem e aprofundassem os seus processos de resolução.

> L. Filipe: Sabe? Nós já adivinhámos e como os valores de y não estavam, para nós, muito nítidos, viemos a esta opção ver qual era a derivada da função no ponto. Através do gráfico, o valor de g'(2) parecia-nos ser 2,5 e agora chegamos à conclusão que afinal é 3.

Os alunos a partir do gráfico da função derivada já tinham "adivinhado" a derivada da função no ponto $x = 2$, no entanto, não estavam completamente convencidos do rigor da leitura efectuada. Perante uma metodologia de ensino que privilegiava a experimentação, estes alunos tiveram tempo para verificar soluções utilizando procedimentos diferentes e fizeram-no com uma certa liberdade. Não confiavam apenas no professor ou no livro para a sua verificação. Os alunos quando desconfiavam da resposta recorriam, por sua iniciativa, a outro procedimento para validar ou rejeitar a solução encontrada, o que se reveste de particular importância no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Na questão 3 da ficha VI, afirmava-se que o Carlos tinha lançado verticalmente, de baixo para cima, uma bola e que a altura **h**, em metros, atingida pela bola **t** segundos após o lançamento era dada pela equação $h = 16t - 4t^2$. Pedia-se aos alunos que determinassem o instante em que a recta tangente à curva representativa da função era horizontal.

O Filipe afirmou que a recta tangente à curva era horizontal quando o seu declive fosse nulo, ou seja quando a derivada da função fosse igual a zero, identificando derivada de uma função num ponto com declive da recta tangente à curva nesse ponto. Derivou a expressão analítica da função e igualou-a a zero, continuando a estabelecer conexões analíticas e gráficas adequadas ao desenvolvimento da actividade.

O Luís Carlos desenvolveu esta actividade individualmente. Começou por afirmar que a tangente à curva era horizontal "no ponto mais alto". Associou este ponto a um ponto de derivada nula, encontrou a derivada pelas regras de derivação e igualou a zero para obter o instante pedido.

> L. Carlos: Ah! A tangente à curva é horizontal, é o ponto mais alto, quando ela chega lá.
>
> Inv: Sim.
>
> L. Carlos: É quando a aceleração é igual a zero. Qualquer coisa que eu lance, ela... o ponto mais alto dela, ela faz qualquer coisa como se fosse uma parábola. Assim uma coisa deste tipo [desenha uma parábola com a concavidade voltada para baixo]. Este ponto mais alto onde a tangente é zero é quando ela perde... quando chega lá pára. A velocidade no eixo dos xx nunca varia, o que vai variar é a velocidade nos yy, por causa da aceleração. Sobe, pára. Não pára, porque tem velocidade em xx, mas em yy deixa de subir e começa a descer. E faz aquele "bico" que é onde queremos a tangente. É a altura máxima. Isto tem uma fórmula, mas já não me lembro. 16-8t... encontro o zero da velocidade [escreve] $16-8t=0 \Leftrightarrow 8t=16 \Leftrightarrow t=2{,}0s$.

Para o Luís Carlos, a acção combinada entre as imagens gráficas e o pensamento analítico foi importante para resolver a questão. Além disso, este aluno conseguiu fazer uma ligação entre os conceitos em termos das disciplinas de Física e de Matemática. Afirmou que a tangente à curva era horizontal no ponto mais alto, quando a aceleração era igual a zero, mas recorreu ao esquema da parábola "aquele 'bico' que é onde queremos a tangente", para continuar o raciocínio.

6.1.3.2. Determinação da derivada de uma função num ponto a partir do gráfico da função derivada.

Algumas das actividades em que se pedia aos alunos que determinassem a derivada de algumas funções em determinados pontos, a partir do gráfico da sua função derivada, fomentaram nos alunos a utilização de estratégias mistas. Como já foi referido, algumas dessas actividades envolviam funções de fácil derivação a partir das regras e, além disso, a leitura de valores no gráfico da função derivada nem sempre se manifestou imediata. Assim, embora os alunos tenham começado por utilizar uma estratégia geométrica na resolução dessas actividades, a determinado momento, passaram a utilizar uma estratégia analítica, por sentirem que esta lhes poderia facilitar a resposta.

Na questão 1 da ficha III, mesmo aqueles alunos que demonstraram, ao longo desta experiência de ensino, privilegiarem estratégias geométricas no desenvolvimento das actividades, optaram, a determinado momento, por uma estratégia analítica de resolução.

> L. Carlos: Vá lá, Filipe. Diz quanto é f'(0).
>
> Filipe: É 0.
>
> L. Carlos: Era uma pergunta muito difícil... E f'(-2)?
>
> Filipe: Não se consegue ver bem... Deve ser -4 [olhando para o gráfico].
>
> L. Carlos: E f'(2), Filipe?
>
> Filipe: É 4.

O Filipe respondeu a esta questão sem olhar para o gráfico da função derivada. Parece ter substituído x por 2 na expressão analítica da função derivada. Não é claro o modo como determinou esta expressão. Pode ter feito uma tradução imediata da representação gráfica da função derivada na sua representação analítica ou pode ter recorrido às regras de derivação.

> L. Carlos: Mas eu também podia ter substituído em y = 2x, x por -2 e obtinha logo o valor -4.
>
> Inv: Sim, mas nesse caso não estava a calcular, graficamente, o valor da derivada.
>
> A. Luísa: Vamos ver no ponto 2.
>
> [O Luís Carlos queria substituir x por 2 na expressão 2x]
>
> A. Luísa: Tu estás a ver pelo 2x. Ele é muito "batoteiro"... No ponto 2 dá 4.

Estes alunos manifestaram-se confiantes na diversificação de estratégias tornando-se eles próprios os principais directores e construtores da sua aprendizagem. Utilizaram uma ou outra estratégia de resolução mudando de um tipo de representação para outra de acordo com a situação.

Em resumo: Os alunos que utilizaram estratégias mistas no desenvolvimento das actividades demonstraram possuir flexibilidade na exploração de ideias matemáticas e na experimentação de métodos alternativos de resolução de questões. Perante a utilização de uma estratégia que não estava a resultar muito bem, os alunos não desistiram, tentaram uma estratégia diferente, evidenciado interesse e criatividade para fazer Matemática. Estes alunos conseguiram trabalhar com a noção de derivada em vários contextos demonstrando uma compreensão ampla do seu significado. Perceberam que estratégias alternativas podiam responder melhor a uma dada situação. Os próprios alunos avaliaram essas estratégias com base na sua eficácia.

Apresentamos um quadro resumo e comparativo das duas principais estratégias utilizadas pelos alunos na determinação da derivada de uma função num ponto.

Quadro 6.1 — Determinação da derivada de uma função num ponto

Alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica	Alunos que privilegiaram uma estratégia analítica
• Associaram derivada ao declive da recta tangente.	• Não associaram derivada ao declive da recta tangente.
• Traçaram rectas tangentes à curva e determinaram o seu declive.	• Fizeram a tradução representação gráfica —> representação analítica. Utilizaram regras de derivação.
• Leram ordenadas de pontos no gráfico da função derivada. Ficaram confortáveis com a leitura de valores aproximados.	• Leram algumas ordenadas de pontos no gráfico da função derivada. Preocuparam-se com o rigor das leituras feitas.
• Utilizaram propriedades geométricas— simetrias nos gráficos das funções.	• Utilizaram propriedades algébricas, numéricas e trigonométricas.

6.2. Determinação da derivada em pontos críticos

Parece-nos pertinente sublinhar algumas das dificuldades com que os alunos se depararam na determinação da derivada da função em determinados pontos considerados críticos (pontos de descontinuidade, "bicos") durante esta experiência de ensino. De uma maneira geral, os alunos manifestaram bastantes dificuldades e diversidade nos processos de determinar as derivadas das funções nesses pontos. Por isso, é difícil analisá-las ao nível das estratégias.

Queremos sublinhar que o pouco sucesso manifestado pelos alunos na determinação da derivada de uma função em pontos críticos não implica, por parte de alguns alunos, uma má compreensão da interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto. A maior parte das vezes, as dificuldades dos alunos prenderam-se com um traçado incorrecto das rectas secantes.

6.2.1. Dificuldades no traçado de rectas secantes

Alguns alunos manifestaram dificuldades em traçar rectas secantes às curvas representativas de funções em determinados pontos e, de uma maneira especial nos pontos críticos da função ("bicos", pontos de descontinuidade). As principais dificuldades prenderam-se com a indicação incorrecta do ponto fixo e com o facto de o ponto móvel nem sempre se deslocar sobre a curva aproximando-se do ponto fixo.

Os alunos, embora tendo visualizado, no ecrã do computador, vários exemplos, tiveram uma certa dificuldade em interpretar como é que as rectas secantes conduziam, no caso limite, à recta tangente. Pareciam não associar este processo ao cálculo do limite da razão incremental quando x se aproximava de x_0.

Na questão 3 da ficha IV pedia-se aos alunos que determinassem, por observação gráfica, um valor aproximado da derivada de cada uma das funções (figura 6.8) no ponto de coordenadas (0, 0). Não era dada a representação analítica destas funções.

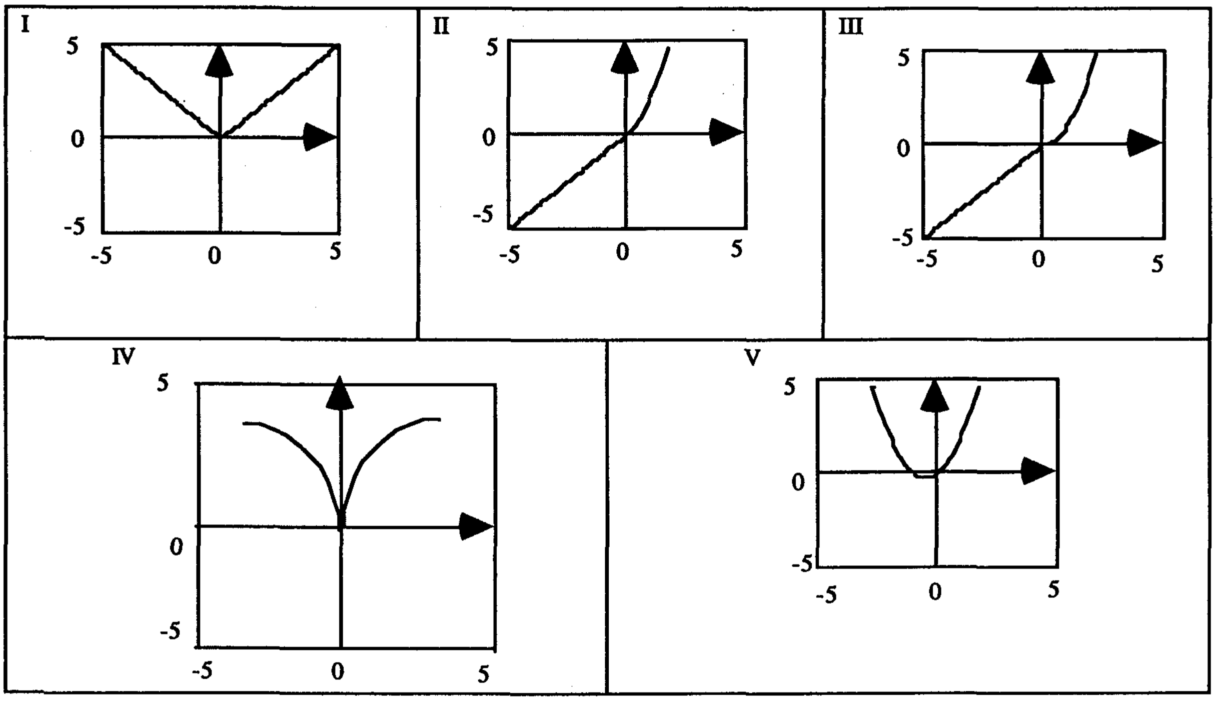


Fig. 6.8 - Gráficos da questão 3 da ficha IV

Para a maioria dos alunos, não foi imediato responder a esta questão, por dificuldade no traçado das secantes. Afirmou o Luís Carlos: "Nós não estavamos a traçar bem as secantes. Não nos estavamos a aproximar do ponto de abcissa 0". Ou seja, os alunos não conseguiam reproduzir com papel e lápis o processo utilizado pelo computador no traçado da tangente à curva num ponto P como sendo o limite das rectas secantes que passam por P e por um ponto móvel sobre a curva aproximando-se de P. Esta dificuldade agravou-se nos casos em que a recta tangente coincidia com o gráfico da função e nos casos em que as derivadas eram infinitas.

Quando, no gráfico da função III (figura 6.9), a Cristiana afirmava que a derivada à direita do ponto de abcissa 0 era 1, traçava as secantes de modo que o ponto móvel, em vez de se aproximar, afastava-se do ponto fixo (figura 6.10).

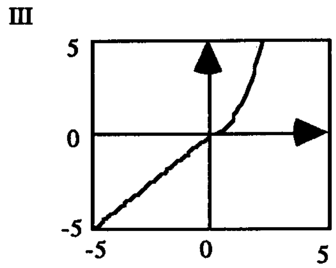


Fig. 6.9 - Gráfico da função III da questão 3 da ficha IV

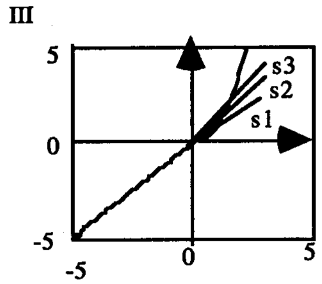


Fig. 6.10 - Esquema feito pela Cristiana para determinar a derivada função no ponto de abcissa 0.

6.2.2. Dificuldades na determinação da derivada em pontos de descontinuidade

O cálculo da derivada da função em pontos de descontinuidade não foi, na maioria dos casos, uma tarefa que os alunos desempenhassem com facilidade. Uma resposta espontânea, consistia na afirmação de que a função não tinha derivada nesses pontos, por não ser contínua. Para justificarem esta afirmação, todos os alunos "recitaram" bem o teorema: "toda a função com **derivada finita** num ponto é contínua nesse ponto" e acrescentaram ainda: "então, se a função não é contínua no ponto, não pode ter **derivada** nesse ponto" (não se referiam, neste caso, a derivada finita). A palavra finita que figurava no enunciado do teorema não parecia ser significativa, nem ter qualquer tipo de influência na resolução das questões, embora nenhum dos alunos a tivesse suprimido quando recorria a uma justificação enunciando o já referido teorema.

Alguns alunos confundiam também função descontínua num ponto com função não definida nesse ponto e, desse modo, concluíam que não podia existir derivada da função num ponto em que a função não estava definida.

O facto dos alunos mostrarem uma certa relutância em afirmar que a derivada de uma função num ponto era infinita aumentou as dificuldades manifestadas na determinação da derivada em pontos de descontinuidade. Essa relutância de falar de derivadas infinitas não se verificou, apenas, quando a tarefa do cálculo da derivada de uma função num ponto dependia dos próprios alunos traçarem a recta tangente à curva representativa da função nesse ponto, como um limite do traçado de várias rectas secantes. Mesmo quando as derivadas foram determinadas recorrendo ao *software* disponível, os alunos, manifestaram o mesmo tipo de dificuldades.

> Filipe: [O declive] Vai em 31622...
>
> Inv: O que é que vos parece? Então quanto é que é a derivada da função?
>
> Filipe: A derivada não existe.
>
> L. Carlos: Não, a recta, a recta, vai ser o eixo dos ...
>
> Filipe: O declive é igual à tangente. A tangente de $\frac{\pi}{2}$ é $+\infty$.
>
> L. Carlos: Então $f'(0) = +\infty$.
>
> Inv: Porque é que o Filipe estava a dizer que não existia?
>
> Filipe: Considerando que $+\infty$, não é um valor finito. Não posso dizer que o declive é $+\infty$, porque se depois vou pegar no $y = mx + b$...depois não consigo fazer nada com o **m**.

A Cristiana, por exemplo, chegou mesmo a afirmar que "para mim, quando é mais infinito, não existe". Este tipo de justificação dada também por outros alunos, pode estar associada ao facto de, no estudo da trigonometria, os alunos terem aprendido que a tangente de 90° não estava definida. Para se defenderem, alguns alunos, sempre que as derivadas laterais da função num determinado ponto eram infinitas, mas de sinais contrários, limitaram-se a responder que não existia derivada da função no ponto porque "um declive é negativo e o outro é positivo". O facto de, nesses pontos, as rectas tangentes ou as semi-tangentes atingirem uma posição vertical, dificultava a atribuição do sinal da derivada lateral, a não ser que os alunos vissem as tangentes como um caso limite do processo contínuo das rectas secantes que, nuns casos tinham declives positivos e, noutros casos tinham declives negativos.

Depois de perceberem que, pelo facto de não existir derivada finita nos pontos de descontinuidade da função, podia ou não existir derivada infinita, os alunos viram-se confrontados com o problema de traçar rectas secantes a partir desses pontos de descontinuidade.

6.2.2.1. Traçado das secantes em pontos de descontinuidade da função

Como foi referido, nas questões em que os alunos deviam determinar a derivada de uma função em pontos de descontinuidade, a maioria começou por recordar o teorema que relaciona a diferenciabilidade de uma função num ponto com a continuidade da função nesse ponto. Assim, chegavam à conclusão que não existia derivada finita da função nesses pontos. Perante a insistência da professora e da investigadora para determinarem as derivadas laterais da função nesses pontos, os alunos viram-se confrontados com a dificuldade de traçar secantes em pontos de descontinuidade.

Os alunos, embora tendo visualizado algumas situações dinâmicas, de rectas secantes que se aproximavam da recta tangente à curva em determinados pontos, proporcionadas pelo *software*, demonstraram algumas dificuldades em perceberem esse processo quando tiveram necessidade de traçar rectas secantes para determinar a derivada de uma função em pontos de descontinuidade. O ponto fixo considerado nem sempre era o ponto em que se pedia para determinar a derivada. O ponto móvel, por vezes, não se deslocava sobre a curva, "navegava" sobre o plano. Outras vezes, o ponto móvel deslocava-se sobre a curva mas, em vez de se aproximar do ponto fixo, afastava-se dele. Por vezes, alguns alunos, pareciam traçar as rectas secantes sem qualquer conexão com o facto de estarem a determinar, geometricamente, o $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Na questão 2 da ficha V pedia-se aos alunos que determinassem, geometricamente, a derivada da função, no ponto de abcissa 2, caso existisse (figura 6.11).

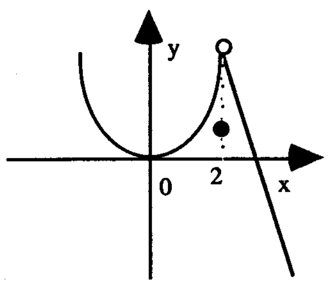


Fig. 6.11 - Gráfico da questão 2 da ficha V

A Cristiana, começou por referir o facto de se tratar de uma função descontínua nesse ponto e recordou o teorema que relaciona a diferencibilidade de uma função com a continuidade.

Paulo: Não existe a derivada no ponto 2.

Crist: [Lê, de novo, a questão] Como é que é aquele teorema? Não é contínua. Ela pode não ser contínua e ter derivada. Mas acho que não existe.

Quando a Cristiana afirmou "pode não ser contínua e ter derivada" não é claro se se estava a referir a derivada finita ou infinita. O teorema não lhe deu uma resposta convincente pelo que começou a traçar rectas secantes considerando como ponto fixo a "bola aberta".

Crist: Para um lado é $+\infty$ e para o outro é $-\infty$.

Paulo: Mas olha que o ponto não é esse [A Cristiana considerava como ponto fixo, a bola aberta].

Crist: O ponto é o de abcissa 2.

Paulo: Tens que fazer tangentes a partir desse pontinho aí em baixo [o pontinho de "bola fechada"] e não a partir da "bola aberta".

Crist: É verdade... Ai que já não sei. Assim acho que existe.

Paulo: Não, não. Porque a recta quando se aproxima vai fazer assim. Então não existe.

O Paulo une as bases das mãos e vai aproximando os dedos sugerindo o movimento das rectas secantes à esquerda e à direita do ponto de abcissa 2. Não chega a unir os dedos, de acordo com a sua concepção de que as semi-rectas tangentes nunca chegam a ser verticais.

Crist: À esquerda é $+\infty$ e à direita é $-\infty$.

A Cristiana deu esta resposta sem grande atenção ao que o Paulo explicava.

Paulo: Pensas no ponto fixo, na "bola fechada" e na tangente e vês a recta onde é que vai dar? Uma recta dá assim e a outra assim, logo são diferentes. [O Paulo fez, com as mãos, as direcções das sucessivas rectas secantes à esquerda e à direita do ponto de abcissa 2 e concluiu]: Então não existe.

Repare-se que o Paulo, um aluno com muita intuição a partir da observação gráfica, não estava preocupado com o sinal das derivadas laterais. Sabia que eram diferentes, porque as semi-tangentes não estavam no prolongamento uma da outra e essa razão era suficiente para afirmar que não existia derivada da função no ponto. A Cristiana parece ter percebido a explicação dada pelo Paulo e concluiu:

Crist: À esquerda é então $-\infty$. E $+\infty$ à direita.

A Cristiana, uma aluna mais prudente, que gostava do rigor e da precisão dos resultados, sentiu necessidade de especificar o sinal das derivadas laterais para, em seguida, poder aplicar a regra — não existe derivada da função porque as derivadas laterais são diferentes.

O Paulo não gostava de afirmar que o declive de uma recta podia ser mais ou menos infinito. Para ele, as rectas tangentes nunca atingiam uma posição vertical. Tentava fugir ao problema afirmando que, se as derivadas laterais eram diferentes, não existia derivada da função no ponto, evitando, deste modo, falar de derivadas finitas ou infinitas. O Paulo foi um dos alunos que manifestou, ao longo desta experiência de ensino, recorrer a processos próprios e lógicos de ultrapassar as dificuldades que lhe surgiam.

Paulo: Pensas no ponto fixo e na tangente e vês a recta onde é que vai dar. Uma recta dá \ e a outra /, logo são diferentes. Então não existe.

Crist: À esquerda é então $-\infty$... e $+\infty$ à direita...

Paulo: A função não está definida aí nesse ponto. Não chega a ser em cima do 2. Fica um pouco ao lado. Por isso nunca chega a ser $+\infty$ nem $-\infty$, fica um pouco ao lado... Um declive é negativo e o outro é positivo. Agora... qual é, também não sei. Eu escrevi que era maior e menor, mas que nunca chega ao ponto. O que sabemos é que é positivo de um lado e negativo do outro.

Quando o Paulo afirmou que a função "não está definida aí nesse ponto" parecia confundir função descontínua num ponto com função definida nesse ponto.

Prof: As secantes começas assim, não é? [e traça uma primeira secante] Depois vais aproximando este ponto dali. Agora a secante vai-se movendo, até ficar vertical.

Paulo: Mas nunca fica 90°.

Prof: Bem, no limite fica.

Em relação a essa mesma questão, O Zé começou por recorrer ao teorema que relaciona a diferenciabilidade com a continuidade de uma função num ponto.

Zé: Não. A função é descontínua nesse ponto. A gente pode dizer que se a função é descontínua...

Inv: O que é que pode afirmar?

Zé: Que não tem derivada...

Inv: Pode afirmar que não tem derivada finita. Mas pode ter derivada infinita. Trace lá as secantes.

Zé: No ponto 2?

Inv: Sim, o ponto fixo qual é? É o ponto de abcissa 2.

O Zé teve algumas dificuldades em traçar as secantes, porque considerava a "bolinha" aberta como sendo o ponto fixo.

Zé: Aqui quando vem deste lado... vai traçar...

Inv: Mas quero que trace mesmo as secantes. Porque é que partem desse ponto? O ponto fixo qual é?... O ponto fixo não é o ponto de abcissa 2?

Zé: Pois...

Com a ajuda da investigadora, o Zé acabou por traçar as rectas secantes e concluir que não existia derivada da função no ponto por serem diferentes as suas derivadas laterais.

Ainda em relação a essa questão, o Filipe referiu tratar-se de um ponto de descontinuidade da função pelo que apelou ao teorema que relaciona a diferenciabilidade de uma função num ponto com a continuidade da função nesse ponto.

Filipe: A função não é contínua.

L. Carlos: Ela é positiva... quando vem da esquerda, a derivada...

Filipe: A função não sendo contínua... Sendo a função descontínua, deixa de haver derivada.

L. Carlos: Pois é.

Inv: Claro, deixa de haver derivada finita. Mas a derivada pode ser infinita, não é?

Filipe: Não.

L. Carlos: Não, mas aqui vê-se logo que não dá.

Este "não" convicto do Filipe pode querer significar que o aluno visualizou rectas tangentes com declives diferentes. A investigadora queria perceber como é que os alunos imaginavam essas rectas tangentes, pelo que insistiu com os alunos no sentido destes determinarem as derivadas laterais da função naquele ponto.

> Inv: Há funções que não são contínuas num ponto mas que têm derivada infinita nesse ponto. Claro que, as funções não são diferenciáveis nesses pontos.
>
> L. Carlos: Sim.
>
> Inv: De qualquer modo, eu gostava que, neste caso, determinassem as derivadas laterais.
>
> L. Carlos: Então isto à esquerda... mas quando ela tendesse... vai para cima.
>
> Inv: Não se esqueça que o seu ponto fixo agora é este [Continuam a manifestar algumas dificuldades em traçar as secantes], que é o ponto no qual eu estou a pedir para calcularem a derivada.

Na questão 5 da ficha VI, pedia-se a derivada da função, caso existisse, no ponto de abcissa 3 (figura 6.12) por observação gráfica.

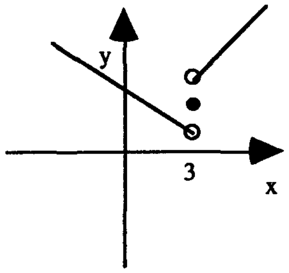


Fig. 6.12 - Gráfico da questão 5 da ficha VI

O Luís Carlos começou por afirmar que não existia derivada [finita] da função no ponto de abcissa 3, por se tratar de um ponto de descontinuidade da função.

A investigadora sugeriu-lhe que traçasse as rectas secantes, para determinar as derivadas laterais da função nesse ponto e o Luís Carlos, uma vez mais, teve dificuldade em fazê-lo.

Em relação a essa questão, o Luís Filipe começou por afirmar que não existia derivada da função no ponto de abcissa 3, parecendo imaginar rectas tangentes à esquerda e à direita com declives diferentes. A Cristiana, não percebeu a afirmação do colega. Pediu ajuda à investigadora. A Cristiana sabia que deveria traçar as rectas tangentes mas não sabia como fazê-lo.

> L. Filipe: Não deve existir, pois não? Mesmo que exista à direita é diferente da da esquerda, por isso não existe.
>
> Crist: Pois. *Stora*? Pode chegar aqui, se faz favor? Como é que vejo as tangentes no ponto 3?
>
> Inv: Ora vamos lá ver as secantes... É sempre o drama da Cristiana...
>
> Crist: Bem, eu acho que não existe...

A Cristiana começou a traçar as rectas secantes à direita evidenciando alguma insegurança.

> Crist: É assim?
>
> Inv: Vamos. Essas são assim. E quanto é que vai dar?
>
> Crist: Mais infinito. Agora estas são assim...
>
> Inv: Exacto. Continue.
>
> Crist: Também é mais infinito. Afinal existe.

Com a ajuda da investigadora, estes alunos concluíram que existia derivada infinita da função no ponto x = 3, um ponto de descontinuidade da função.

Por vezes, algumas respostas pouco correctas foram originadas pela dificuldade de calcular declives infinitos (ficha VI, questão 6, figura 6.13).

L. Carlos: No ponto -2... eu troco-me todo com as secantes ...[O Luís começa a traçar as secantes à esquerda de -2 e diz:]

L. Carlos: Está a tender para mais infinito.

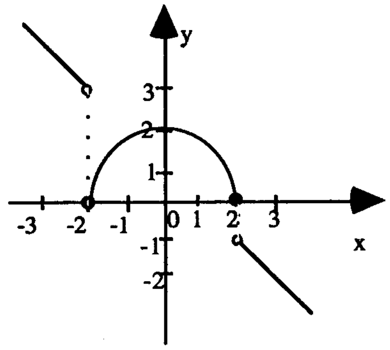


Fig. 6.13 - Gráfico da questão 6 da ficha VI

Inv: Para mais infinito?

L. Carlos: Ah! Não, não...

Em relação a essa questão, o Zé afirmava que a derivada lateral direita no ponto de abcissa 2 era -1, uma vez que estava a calcular o declive da semi-recta, à direita de 2. Por raciocínio semelhante, afirmava que a derivada à esquerda do ponto de abcissa -2 era -1. O Zé foi um dos alunos que manifestou, de início, mais dificuldades no traçado das secantes.

Inv: Aqui na questão 6 não percebi porque é que escreveu que a derivada à direita de 2 era -1. Explique-me o que fez, ou melhor, trace as rectas secantes para eu ver.

Zé: Vem assim, vem assim, vem assim....

O ponto móvel em vez de se deslocar sobre o gráfico da função, "navegava" no plano.

Inv: As secantes têm que encontrar a curva. O $f'(-2^{+})$ dá...

Zé: Dá $+\infty$.

Inv: Agora veja o que se passa com $f'(-2^{-})$.

Zé: Então é -1.

O aluno considerava como derivada lateral esquerda do ponto de abcissa -2, o declive da semi-recta à esquerda de -2.

Inv: Não. Não se esqueça que a função no ponto de abcissa -2 não vale 3, mas sim 0. É neste ponto que a "bolinha" está fechada.

Zé: Ah! Pois é. Por isso é que eu me enganei.

Parece-nos possível adiantar algumas justificações para as dificuldades manifestadas pelos alunos no traçado das secantes ao determinar a derivada de uma função em pontos de descontinuidade.

O *software* que estava a ser utilizado nestas aulas não permitia visualizar a maior parte dos gráficos de funções definidas por ramos. Assim, só lhes foi possível visualizar, com recurso a ferramentas computacionais, o traçado das rectas tangentes como processo limite do traçado de rectas secantes quando as funções eram definidas, analiticamente, por uma expressão designatória em todo o seu domínio ou, no caso desta não estar definida num determinado ponto era permitido, pelo programa, dar um valor para a função nesse ponto. Ficou-nos a ideia de que, quando os alunos visualizavam este processo dinâmico, aguardavam, com expectativa, que o valor do declive exibido na tabela de valores que aparecia ao lado do gráfico, começasse a ter um valor constante, para então responderem à questão que lhes era colocada, desligando do processo utilizado para a determinação desse valor: qual o ponto fixo que estava a ser considerado; como é que o ponto móvel deslizava sobre a curva representativa da função; o movimento do ponto móvel, aproximando-se do ponto fixo. Deste modo, os alunos, perante a tarefa de determinarem, graficamente, derivadas em pontos de descontinuidade de funções que não podiam introduzir no computador, viram-se confrontados com o tipo de dificuldades assinaladas.

Em todas as questões das fichas de actividade que envolviam o cálculo da derivada de uma função em pontos de descontinuidade, as derivadas laterais eram infinitas, umas vezes com o mesmo sinal, outras vezes com sinais contrários. Este facto veio aumentar o grau de dificuldade das questões. Os alunos demonstraram, ao longo desta experiência de ensino, uma certa relutância em falar de derivadas infinitas, talvez por ligação a uma concepção anterior — "a tangente de 90° não está definida".

Como referimos, para alguns alunos, era suficiente o facto de uma função ser descontínua num ponto para se sentirem "autorizados" a afirmar que não existia derivada da função nesse ponto, sem fazerem distinção entre derivada finita e infinita.

Em resumo: A determinação da derivada da função em pontos de descontinuidade nem sempre foi uma tarefa que os alunos desempenharam com facilidade. De uma maneira geral, afirmaram que a função não tinha derivada nesses pontos, pelo facto de a função não ser contínua, mostrando, deste modo, não fazerem qualquer diferença entre derivada e derivada finita.

Os alunos, de uma maneira geral, mostraram uma certa relutância em afirmar que a derivada de uma função num ponto era infinita. Para alguns deles, as rectas tangentes nunca ficavam numa posição vertical. Sempre que as derivadas laterais de uma determinada função num ponto eram infinitas, mas de sinais contrários, defendiam-se limitando-se a responder, que não existia derivada da função no ponto porque um declive era negativo e o outro era positivo. O facto de, nesses casos, as rectas tangentes ou as semi-tangentes à função atingirem uma posição vertical, dificultava, a determinação do sinal da derivada.

Perante a insistência da professora e da investigadora para determinarem as derivadas laterais em pontos de desontinuidade, os alunos viram-se também confrontados com a dificuldade de traçarem rectas secantes. Assim, por vezes, o ponto fixo considerado não coincidia com o ponto em que se pretendia determinar a derivada; o ponto móvel nem sempre se deslocava sobre a curva, "navegava" sobre o plano; outras vezes, o ponto móvel embora se deslocasse sobre a curva, em vez de se aproximar do ponto fixo, afastava-se dele.

6.2.3. Determinação da derivada nos "bicos"

Neste estudo, para usarmos uma linguagem mais próxima da utilizada pelos alunos, vamos chamar "bicos" àqueles pontos em que, utilizando uma linguagem matemática mais rigorosa, deveríamos chamar pontos angulosos.

O determinação da derivada de uma função nos "bicos" nem sempre foi tarefa fácil para os alunos. Alguns consideraram que o seu valor era zero. Esta concepção pode ter duas justificações: (a) o facto de alguns alunos terem considerado esses pontos como se fossem vértices de parábolas, e, nesse caso, a derivada da função deveria ser zero; (b) o facto de alguns alunos traçarem, nesses pontos, rectas tangentes horizontais, de acordo com o seu conceito imagem de recta tangente a uma curva num ponto, construído a partir de experiências anteriores, como sendo a recta que encontra a curva apenas nesse ponto, sem a "atravessar". Esse conceito pode ter levado os alunos a traçar uma recta que não era tangente à curva nesse ponto mas que tinha apenas um ponto em comum com a curva.

Alguns alunos, mesmo depois de visualizarem o gráfico da função derivada, manifestaram algumas dificuldades em perceber bem o que se passava com a derivada da função nesses "bicos".

Na questão 3 da ficha IV, eram dados os gráficos de algumas funções e pedia-se um valor aproximado da derivada de cada uma dessas funções no ponto de abcissa 0. A primeira dessas funções era a função f(x) = | x |. Para resolver esta questão, o Luís Filipe e o Zé recorreram ao computador que, através de opção própria, lhes exibiu o gráfico da função derivada. Ficaram admirados com o aspecto desse gráfico. Dizia o Luís Filipe, observando o gráfico: "Mas eu pensava... eu sabia que ia ficar negativo num lado e positivo no outro, mas com esta 'cena' aqui no meio ... as rectas são 1 e -1. E quando é zero? Porque ali é um ponto diferente... o melhor é não meter nada".

O Luís Filipe parecia não saber como indicar no gráfico da função derivada o facto de não existir derivada da função num determinado ponto.

O Zé na sua ficha de trabalho uniu com uma recta vertical coincidente com o eixo dos yy, os pontos de ordenada -1 e 1, parecendo exigir a continuidade da função derivada.

Esta concepção de unir com rectas verticais dois pontos no gráfico da função derivada para, de certa forma, se obter um gráfico contínuo, também foi encontrada nos alunos envolvidos na investigação de Scher (1993). Nemirovsky e Rubin (1992) notaram também a tendência que os alunos têm de traçar o gráfico da função derivada semelhante ao gráfico da função, ou seja os alunos têm tendência a preservar as características geométricas da função quando traçam o gráfico da sua função derivada.

Em relação à mesma questão, a Cristiana e o Paulo não revelaram dificuldade em determinar o valor da derivada da função nos pontos de abcissa diferente de zero.

Representaram graficamente a função derivada (figura 6.14), sem evidenciarem qualquer tipo de preocupação com o ponto de coordenadas (0, 0).

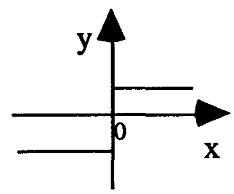


Fig. 6.14 - Gráfico da função derivada da função I da questão 3 da ficha IV feito pela Cristiana e pelo Paulo

Quando a investigadora lhes perguntou o que se passava com esse ponto, a Cristiana respondeu: "Agora, quando x é 0... não está definido porque é mais infinito. f' (0) é mais infinito. Então é aberto nos dois". A Cristiana estava a traçar as secantes "passando" pelo ponto de coordenadas (0, 0), mas o ponto móvel afastava-se do ponto fixo. Esta aluna, nesta altura, tentava já resolver algumas das questões tentando utilizar uma estratégia geométrica, no entanto, continuava a manifestar uma certa dificuldade em fazer uma ligação coerente entre o limite da razão incremental e declive da recta tangente à curva no ponto.

Ainda em relação à mesma questão, O Luís Carlos afirmou que a derivada da função no ponto x = 0 era 0.

Filipe: A partir da observação...um valor aproximado da derivada? Não existe.

L. Carlos: É zero.

Filipe: Mas qual zero, Cuca?

Inv: Não tem. Porquê?

L. Carlos: Claro. Não, não tem, porque as derivadas à esquerda e à direita são diferentes, tens razão.

Nesta situação, poderíamos concluir que o aluno fez esta afirmação tendo em conta que o valor da função no ponto era igual a zero, confundindo, desse modo, derivada de uma função num ponto com valor da função nesse mesmo ponto. No entanto, o facto deste aluno ter feito afirmações do mesmo tipo noutras situações semelhantes em que o "bico" não coincidia com o ponto de coordenadas (0, 0), fez-nos pensar que o aluno raciocinou em termos do vértice de uma parábola, como, aliás, ele próprio acabou por afirmar em relação à questão 1 de ficha V.

Era dado o gráfico da função representado na figura 6.15 e perguntava-se se existia derivada da função no ponto de abcissa -2. O Luís Carlos respondeu que existia e que era igual a 0, pensando que se tratava do vértice de uma parábola.

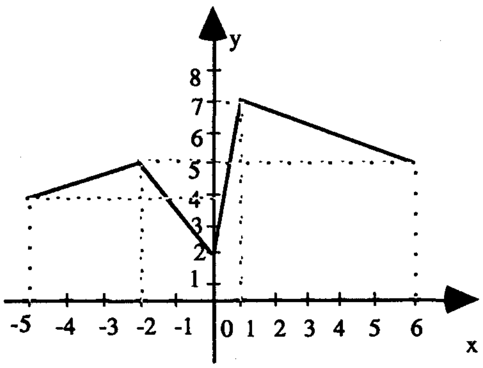


Fig. 6.15 - Gráfico da questão 1 da ficha V

L. Carlos: Existe f' (-2)?

Filipe: Não.

L. Carlos: Porquê? Não existe f' (-2)? Existe, existe, é 0...

Inv: Calma, Luís Carlos. Pense um pouco.

L. Carlos: Ah! Existe. É 0.

Filipe: Quer dizer que o declive desta recta é 0 e o declive desta outra também é 0...

L. Carlos: Não. Está certo. Isto não é uma curva? Isto não é o vértice de uma parábola?

O Filipe, não deu uma resposta, ajudou o Luís Carlos a reflectir de modo a tirar uma conclusão.

Em resumo: Os "bicos" foram considerados, por alguns alunos, como pontos em que não existia derivada, por serem diferentes as suas derivadas laterais. Surgiram, no entanto, algumas respostas e justificações pouco claras no cálculo da derivada da função nesses pontos. Alguns alunos consideraram os "bicos" com sendo vértices de parábolas e, como consequência, a derivada nesses pontos seria nula. Outras respostas não satisfatórias foram originadas por um traçado incorrecto das secantes ou das tangentes. O ponto móvel, muitas vezes, afastava-se do ponto fixo. Alguns alunos imaginavam rectas horizontais à curva nesse ponto para, desse modo, a tocarem apenas num ponto, de acordo com um conceito de tangente como a recta que tem apenas um ponto em comum com a curva e todos os outros pontos exteriores a ela (conceito originado pela definição de recta tangente a uma circunferência).

6.2.4. Tangentes e semi-tangentes

O conceito de recta tangente é, normalmente, introduzido no contexto do estudo da circunferência. Nessa altura, define-se recta tangente a uma circunferência como sendo uma recta que tem apenas um ponto em comum com a circunferência e todos os outros pontos exteriores a ela. Embora no início da experiência de ensino a professora tenha definido recta tangente a uma curva num ponto P como a recta que tinha um declive dado pelo limite dos declives das sucessivas rectas secantes PQ, quando Q se aproximava de P, os alunos possuíam um conceito próprio de recta tangente, construído a partir de experiências anteriores, que os levava a considerar que a recta tangente só podia encontrar a curva num ponto sem a atravessar. Assim, os alunos tinham, por um lado, uma definição formal ou semi-formal da tangente ao gráfico de uma função diferenciável e, por outro lado, um conceito próprio que não se articulava bem com essa definição. Este conceito próprio pode ter originado que alguns alunos, por vezes, respondessem a algumas questões traçando uma recta que não era tangente no ponto. Assim, por exemplo, quando num dado intervalo do domínio da função, esta era definida por uma recta, alguns alunos traçavam a recta tangente em qualquer ponto desse intervalo um pouco ao lado da recta que representava a função, em vez de se lhe sobrepôr (isto pode ser uma das consequências do conceito de recta tangente a uma curva interiorizada pelos alunos quando do estudo da circunferência).

Na questão 7 da ficha VI (figura 6.16) pedia-se aos alunos que, por observação gráfica, determinassem a derivada da função no ponto de abcissa 0.

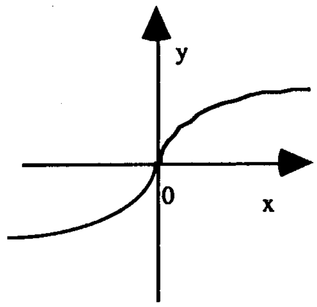


Fig. 6.16 - Gráfico da questão 7 da ficha VI

A Cristiana, para responder a esta questão, traçou uma recta como mostra a figura 6.17 considerando uma recta tangente à curva no ponto de abcissa 0 sem a "cortar" e afirmou que a derivada da função nesse ponto era 1.

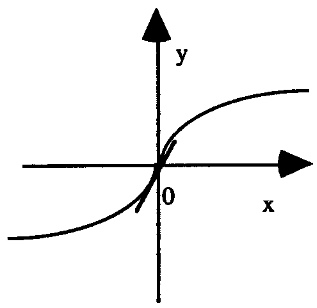


Fig. 6.17 - Esquema feito pela Cristiana para representar a tangente no ponto de abcissa zero.

Esta mesma concepção foi observada no estudo de Vinner (1983). Quando foi pedido aos alunos que traçassem a recta tangente à curva representativa da função $y = x^3$, na origem do referencial, muitos alunos desenharam uma recta de um dos lados, de modo a não atravessar a curva (figura 6.18).

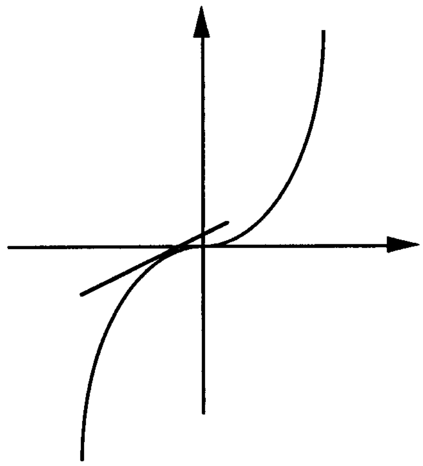


Fig. 6.18 - Tangente à função no ponto de abcissa zero (Vinner, 1983)

Na questão 3 da ficha IV, eram dados os gráficos de cinco funções (figura 6.19) e pedia-se aos alunos que indicassem, por observação gráfica, um valor aproximado da derivada de cada uma funções no ponto de abcissa 0.

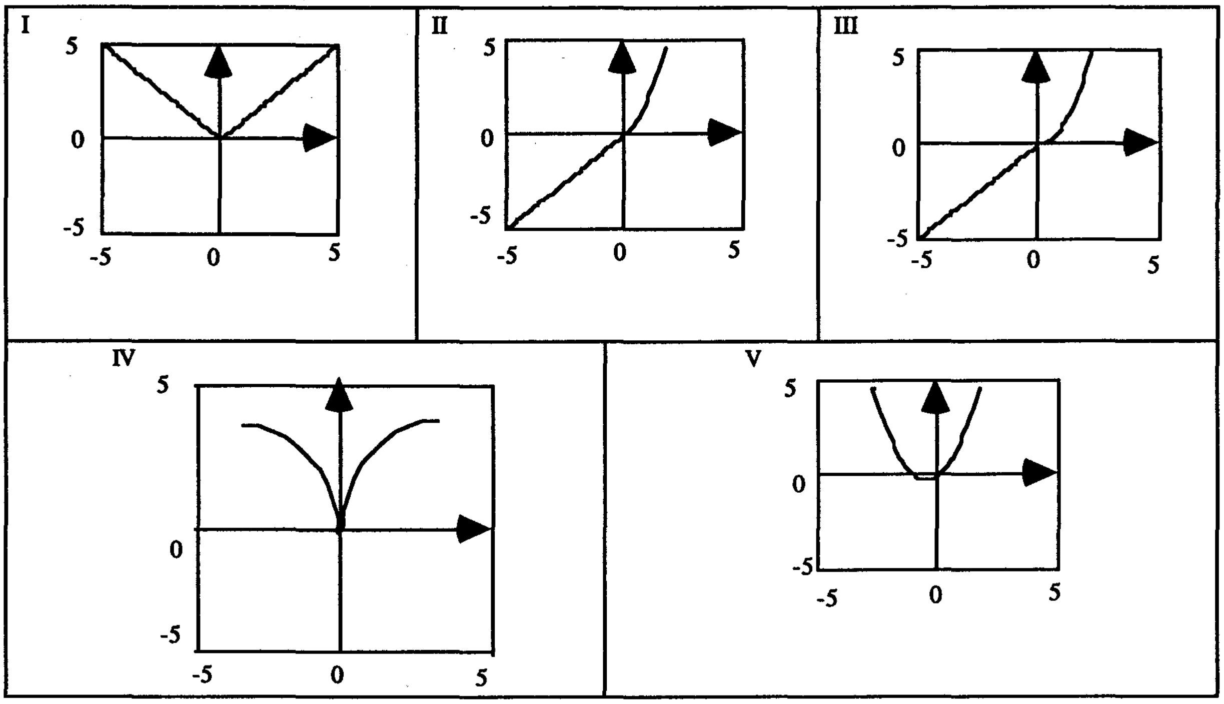


Fig. 6.19 - Gráficos da questão 3 da ficha IV

Pretendia-se que os alunos traçassem, se necessário, as rectas secantes até obter a recta tangente ou semi-tangentes nesse ponto, para, em seguida, indicarem o valor aproximado do declive dessas rectas.

Em relação à função IV (figura 6.19), o Filipe e o Luís Carlos manifestaram uma certa dificuldade em pensar nas semi-tangentes. O Luís Carlos afirmou que a derivada no ponto de abcissa 0 era 0. Esta confusão pode ter sido originada por três concepções diferentes: (a) o facto do valor da função no ponto zero ser zero; (b) o aluno pode ter imaginado a tangente à curva naquele ponto, coincidente com o eixo dos xx, de modo a que essa tangente "encontrasse" a curva apenas num ponto, sem a "atravessar"; e (c) o aluno pode ter identificado aquele ponto com o vértice de uma parábola.

L. Carlos: Ela tem... não tem?... É zero aí.

Filipe: Zero não é, de certeza absoluta. Não dá bem para ver...

Inv: Vejam lá, através das secantes, se chegam a alguma conclusão.

Filipe: Tam... tam... [e vai desenhando as secantes]. Não dá para ver se ela acaba aqui...

L. Carlos: As derivadas são diferentes...

Filipe: Se fizer a curva semi-completa a tangente vai ser mais infinito.

Nesta afirmação do Filipe está implícita a noção de que a derivada lateral direita da função no ponto 0 é mais infinito.

L. Carlos: Eu acho que tem, sabes?

Filipe: É igual. O problema está se a tangente for mais infinito nos dois, é igual.

L. Carlos: A ideia que dá é que ela fica tangente mesmo no eixo dos yy. Ela dum lado faz isto assim e do outro lado faz assim... [O Luís coloca as duas mãos na vertical para sugerir as direcções das duas semi-tangentes].

Estes dois alunos, depois de traçarem as rectas secantes, acabaram por perceber que as derivadas laterais eram infinitas mas não conseguiram atribuir-lhes um sinal. O facto das duas semi-tangentes coincidirem com o semi-eixo positivo dos yy parece ter-lhes criado mais incerteza em relação ao sinal da derivada

Em resumo: O traçado das tangentes e semi-tangentes às curvas representativas de funções, em determinados pontos, nem sempre se manifestou uma tarefa imediata. Experiências anteriores da tangente a uma circunferência introduziram nos alunos uma crença de que a tangente é uma recta que toca o gráfico num ponto e não o atravessa. Esta concepção parece ter causado conflitos cognitivos quando foram considerados outros casos como, por exemplo, a tangente num ponto de inflexão, o caso da tangente num "bico" e ainda nos pontos em que muda a expressão analítica da função. Os alunos têm, por um lado, uma definição formal de recta tangente a um gráfico de uma função diferenciável e, por outro lado, um conceito próprio que não se articula bem com essa definição. Tal conceito pode conduzir os alunos a responder desenhando uma recta que não é uma tangente no ponto requerido.

Muitas destas dificuldades foram ultrapassadas através das interacções que se criaram durante a intervenção didáctica entre a professora e/ou a investigadora e os alunos.

6.3. Conceito de derivada de uma função num ponto.

Um dos objectivos deste estudo era perceber o conceito de derivada de uma função num ponto, construído pelos alunos depois de terem desenvolvido algumas actividades em ambientes computacionais. Assim, numa das últimas fichas de trabalho colocámos aos alunos uma pergunta directa — questão 1, da ficha VIII — *Supõe que tinhas que explicar a um colega o que é a derivada de uma função num ponto. Descreve como o farias. (Não deves dar como resposta que* $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$*).*

As respostas dadas a esta questão revelaram que os alunos tiveram uma certa dificuldade em exprimir verbalmente o conceito. De uma maneira geral, os alunos expressaram-se de uma forma pouco clara e utilizaram um vocabulário pouco preciso, ainda que, por vezes, carregado de significado. A primeira "tentação" foi definir derivada de uma função num ponto como o limite da razão incremental. Como esta resposta não fazia parte das regras do "jogo", a explicação foi, de uma maneira geral, dada em termos das acções que os alunos tinham executado para determinar a derivada de uma função num ponto. Assim, podemos verificar que as explicações dadas revelam que os alunos verbalizaram conceitos diferentes da derivada de uma função num ponto, coerentes com as estratégias que eles próprios utilizaram na sua determinação.

6.3.1. Conceito geométrico

Tal como já tinha acontecido no conceito de declive de uma recta, alguns alunos, quando se referiram à derivada de uma função num ponto, evidenciaram ter construído um conceito que denominámos de geométrico. Estes alunos associaram à derivada de uma função num ponto, o declive da recta tangente à curva representativa da função nesse ponto.

Utilizaram, por vezes, uma terminologia que, de início, levantou algumas dúvidas à investigadora sobre a compreensão que os alunos tinham das noções de inclinação de uma recta, de tangente trigonométrica da sua inclinação e de recta tangente ao gráfico da função no ponto.

Filipe: Explica-me lá a mim.

L. Carlos: Então o que é a derivada de uma função num ponto? É a inclinação da recta tangente ao gráfico nesse ponto.

Falou-se em derivada de uma função num ponto e o Luís Carlos imaginou uma recta tangente ao gráfico da função nesse ponto e acrescentou uma característica dessa recta — a sua inclinação. O aluno utilizou a palavra inclinação como sinónima de declive. Contudo, este conceito intuitivo de inclinação não lhe trazia problemas de compreensão. A investigadora, receando que o aluno confundisse os dois conceitos, tentou clarificar a resposta, mas o Luís Carlos não percebeu a preocupação da investigadora, que parecia querer formalizar algo que, para o aluno, não levantava qualquer dúvida.

Inv: É mesmo a inclinação?

L. Carlos: Eu chamo inclinação. É a tangente [trigonométrica] da recta tangente ao gráfico no ponto.

Inv: Portanto tem uma [recta] tangente, e depois em relação a essa tangente, é a sua inclinação?

L. Carlos: Mas tangente recta.

Inv: Sim, uma recta tangente. E depois é a inclinação dessa recta? Por exemplo a inclinação é de 20^o, 30^o, etc. É isso?

Filipe: Não.

L. Carlos: É a tangente da tangente.

A questão não lhe ofereceu qualquer problema de compreensão e, por isso, o aluno brincou com uma palavra a que ele próprio atribuía significados diferentes.

Filipe: É a tangente da recta tangente ao gráfico. A derivada num ponto é a tangente da recta tangente ao gráfico. É a tangente, portanto a tangente do ângulo...

Inv: Como é que podem dizer isso de outra maneira?

A investigadora queria levar os alunos a uma formalização da resposta que, neste caso, era completamente desnecessária. Os alunos verbalizaram o seu conceito de derivada de uma função num ponto e não tinham que se exprimir utilizando os termos que a investigadora desejava.

L. Carlos: Esta maneira de dizer é muito engraçada... Pronto, eu chamo tangente da inclinação, não é?

Estes alunos adquiriram uma noção geométrica de derivada de uma função num ponto e, na sua resposta, não se preocuparam com o rigor de linguagem. Assim, utilizaram a palavra tangente com dois significados diferentes: recta tangente e tangente trigonométrica (referindo-se à tangente trigonométrica de uma recta como se fosse sinónima de tangente trigonométrica de um ângulo). Estes alunos pareciam divertir-se com a sua definição. Demonstraram possuir um conceito imagem rico de derivada de uma função num ponto. O seu conceito definição era uma verbalização baseada nesse conceito imagem. Repare-se que estes alunos não sentiram necessidade de recordar qualquer tipo de definição formal do conceito.

O Zé manifestou ter construído um conceito de derivada de uma função num ponto semelhante ao destes alunos. Evocou termos da linguagem geométrica — declive, tangente — para tentar definir o conceito. Revelou alguma dificuldade em ordenar as ideias e dar uma resposta clara. No excerto que se segue, a investigadora e o Zé, parecem utilizar a palavra tangente com significados distintos. O aluno parece referir-se à tangente trigonométrica embora não consiga especificar de que ângulo, a investigadora fala de recta tangente à curva no ponto.

Inv: Na sua explicação do conceito de derivada de uma função num ponto, já falou de tangente, de declive, mas ainda não falou de derivada.

Zé: A derivada de uma função num ponto não é... então... não é o valor da tangente...

Inv: Sim, continue...

Zé: Traçamos uma... recta... uma recta que seja tangente à curva no ponto.

Inv: Sim. E depois de ter esta recta tangente?

Zé: A derivada é o valor dessa tangente.

O aluno podia referir-se à tangente trigonométrica do ângulo que a recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx, mas a investigadora não percebeu e tentou que o aluno explicitasse a sua ideia.

Inv: O que é isso do valor de uma recta? A derivada é o valor de quê? Esta recta tangente faz um determinado ângulo com o semi-eixo positivo dos xx...

Zé: Ah! Pois.

Inv: Então o que é?

Zé: É o valor do declive.

Inv: Do declive da recta tangente...

Zé: ... Tangente à curva nesse ponto.

O Zé escreveu imediatamente na sua ficha de trabalho: $m=\text{tg}\ \alpha=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ e fez um esquema igual ao da figura 6.20.

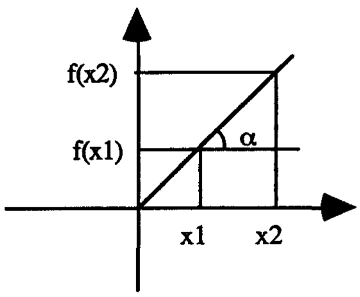


Fig. 6.20 - Esquema elaborado pelo Zé para definir derivada de uma função num ponto

A intervenção da investigadora ajudou o aluno a relacionar os conceitos: declive—tangente trigonométrica—razão incremental—representação gráfica.

Parece-nos importante sublinhar que, estes alunos utilizaram na sua definição a noção de tangente trigonométrica, embora ao longo da experiência de ensino, se tenha utilizado mais a palavra declive de uma recta.

O Paulo espelhou, na sua justificação, um conceito de derivada muito próximo daquilo que tinha visualizado no ecrã do computador — as várias rectas secantes movendo-se até à posição limite de recta tangente, enquanto que o valor numérico dos respectivos declives se ia aproximando de um valor fixo, a derivada da função no ponto.

Escreveu o Paulo:

"Tendo um gráfico qualquer, por exemplo, o da figura 6.21, e escolhendo dois pontos, por exemplo 0 e 2, traçar uma recta que passe por esses dois pontos, depois ir aproximando essa recta de zero de modo que ela passe sempre em dois pontos e, por exemplo, no 1 e assim sucessivamente até que o valor que varia tenda para zero e assim calcular a tangente dessa recta".

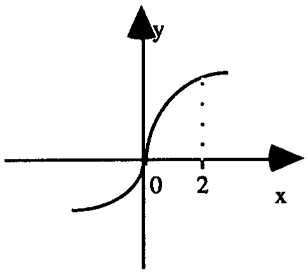


Fig. 6.21 - Esquema feito pelo Paulo para definir derivada de uma função num ponto

O Paulo, na sua justificação, mostrou ter construído um conceito geométrico de derivada de uma função num ponto — recorreu a um gráfico, imaginou uma recta secante movendo-se até a uma posição limite, e falou da tangente trigonométrica do ângulo que essa recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx (ainda que não o tenha verbalizado desta forma), de uma forma dinâmica.

Em resumo: Os alunos que considerámos terem construído um conceito geométrico da derivada de uma função num ponto associaram-lhe o declive da recta tangente à curva representativa da função nesse ponto ou a tangente trigonométrica do ângulo que essa recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx.

Falava-se em derivada de uma função e os alunos imaginavam uma recta tangente ao gráfico dessa função e acrescentavam uma característica dessa recta — a sua inclinação. Nas suas respostas não se preocuparam com o rigor de linguagem. Assim, por exemplo, utilizaram a palavra tangente com dois significados diferentes: recta tangente e tangente trigonométrica. Demonstraram possuir um conceito imagem rico de derivada de uma função num ponto. O seu conceito definição era uma verbalização baseada nesse conceito imagem. Não tentaram recordar qualquer tipo de definição formal do conceito. Espelharam, na sua justificação, um conceito de derivada muito próximo daquilo que tinham visualizado no ecrã do computador — recorreram a um gráfico, imaginaram rectas secantes movendo-se até a uma posição limite, e falaram da tangente trigonométrica do ângulo que essa recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx (ainda que nem sempre o tenham verbalizado desta forma).

6.3.2. Conceito analítico

A Cristiana demonstrou ter construído um conceito de derivada de uma função num ponto que denominámos de analítico. Ao falar de derivada necessitou de recorrer a fórmulas e a regras, ou seja, apresentou uma faceta numérica e analítica do conceito um pouco desligada da respectiva imagem gráfica. Referiu qual a derivada de uma função em determinados pontos "típicos" e falou em regras de derivação.

> Crist: Nesse ponto [onde pretendemos determinar a derivada, a função] pode fazer uma curva... é zero... pode ser uma recta... é o ângulo com que faz... sei lá...

A Cristiana começou por recorrer a um dos primeiros exemplos considerados típicos quando do estudo das derivadas — a derivada num dos extremos da função. Assim, quando afirmou "pode fazer uma curva... é zero" referia-se ao vértice de uma parábola, uma vez que a aluna fez um gesto como se traçasse uma parábola e indicou o seu vértice. Esta aluna recordou a derivada de uma função num ponto característico do gráfico para dar uma definição de derivada. Manifestou, assim uma visão pontual da questão — neste ponto determinado a derivada é zero — e não conseguiu generalizar essa noção para obter um conceito de derivada da função noutros pontos da curva.

Inv: Mas, imagine que a pessoa não sabia nada sobre derivada de uma função... Não começava a dizer assim: " nuns sítios é zero, noutros é..., não é?

Crist: Sim.

Inv: Tinha que dar uma noção clara.

Crist: Então, é um limite... nas vizinhanças daquilo e naquele ponto tem que ser mesmo uma... tem que tomar sempre o mesmo valor... e depois esse valor... é a derivada.

A Cristiana passou então a definir derivada como um limite (também foi uma palavra que ouviu pronunciar em relação às derivadas), mas não conseguiu ligar o conceito de limite com o de derivada.

Inv: Mas o valor de quê? Queria dar uma explicação a um colega. Como é que lhe dizia? Para si, qual a noção de derivada? Falam-lhe em derivada. O que lhe ocorre?

Crist: Lembro-me daquelas regras de derivar...

Perante a insistência da investigadora, passou a utilizar uma linguagem com que se sentia um pouco mais segura, as regras de derivação. A resposta não satisfez a investigadora e a Cristiana recorreu a outro tipo de fórmula "é o delta y sobre o delta x".

Inv: Mas eu queria a noção de derivada. Não queria as regras de derivação...

Crist: Pois...

Inv: Qual o conceito que tem de derivada de uma função num ponto?

Crist: Isso eu não sei.

L. Filipe: Ora a derivada de uma função num ponto é...

Crist: É o delta y sobre o delta x.

Inv: Quando faz o delta y sobre o delta x, o que é que está a fazer? Isso dá-lhe um...

Crist: ... Declive

Inv: O declive de quê?

L. Filipe: Da recta.

Crist: Do ângulo da recta.

Inv: Mas de que recta? De uma recta qualquer?

Crist: Tangente à função naquele ponto.

Todas as frases que a Cristiana usou para tentar definir derivada de uma função num ponto não estavam fora do contexto, no entanto, pareciam estar em compartimentos estanques sem um elemento adequado que fizesse a sua ligação. Esta aluna conhecia as regras e fórmulas que diziam respeito ao estudo das derivadas e, em determinados contextos, sabia como aplicá-las mas, mostrou dificuldade em arquitectar uma definição geral de derivada. Através das interacções geradas durante este diálogo a aluna conseguiu chegar a uma definição.

Em resumo: Os alunos que considerámos terem construído um conceito analítico da derivada de uma função num ponto, necessitaram de recorrer a fórmulas e a regras de derivação para definir derivada. Apresentaram, assim, uma faceta numérica e analítica do conceito sem qualquer conexão com a respectiva interpretação geométrica. Sentiram necessidade de referir a derivada de algumas funções em determinados pontos típicos mostrando, deste modo, possuírem um conceito pontual de derivada. De sublinhar que estes alunos, quando se referiram ao conceito de derivada de uma função num ponto, utilizaram frases dentro do contexto das derivadas, contudo, não conseguiram estabelecer conexões adequadas para construir uma definição geral desse conceito.

6.3.3. Conceito misto

Como já foi referido, alguns alunos utilizaram simultaneamente estratégias geométricas e analíticas na determinação da derivada de uma função num ponto. Assim, acabaram por verbalizar o conceito de derivada de uma função num ponto coerente com as estratégias utilizadas na sua determinação e que designámos de conceito misto.

Na questão 1 da ficha II pedia-se aos alunos que representassem graficamente a função $f(x) = |x^2 - 4|$ e que determinassem, usando o computador, os declives das rectas tangentes à curva no ponto $x = 2$, considerando um ponto móvel à esquerda e outro à direita desse ponto. O enunciado não referia a palavra derivada. O Filipe e o Luís Carlos, depois de terem obtido os valores dos declives das semi-rectas tangentes, expressaram-se em termos da derivada. Para responder à questão *O que concluis dos resultados obtidos?*, afirmou o Filipe com convicção: "a derivada à esquerda de dois é -4, e à direita é 4", evidenciando identificar o declive da recta tangente à curva no ponto com a derivada da função nesse ponto. O Luís

Carlos, depois de ter lido a questão "Existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$?", respondeu: "Não, nem é preciso calcular... porque funciona a derivada". Estes alunos tinham construído um conceito geométrico de derivada de uma função num ponto e conseguiram fazer uma boa conexão com o limite da razão incremental. Ou seja, estes alunos parecem ter construído um conceito geométrico de derivada de uma função num ponto em harmonia com a sua definição formal — limite de uma razão incremental.

Estes alunos demonstraram ao longo desta intervenção didáctica possuírem um esquema conceptual complexo da noção de derivada de uma função num ponto, no sentido em que a associaram simultaneamente a um declive de uma recta tangente (imagem gráfica mais intuitiva) e ao limite de uma razão incremental (imagem analítica mais abstracta).

Em resumo: O conceito de derivada de uma função num ponto pode ser considerado como um conceito complexo, não sendo, normalmente, um conceito construído com facilidade pelos alunos. No final desta experiência de ensino, quisemos compreender como é que os alunos envolvidos definiam esse conceito. Pela análise das respostas dadas, podemos afirmar que os alunos construíram um conceito adequado de derivada de uma função num ponto ainda que, por vezes, tenham manifestado algumas dificuldades em verbalizar essa noção.

Tal como aconteceu na determinação da derivada de uma função num ponto e, de certa forma, em coerência com as estratégias então utilizadas, alguns alunos verbalizaram o conceito de derivada de uma função num ponto recorrendo a uma linguagem mais geométrica, sugerindo um esquema conceptual com imagens gráficas do conceito. Estes alunos associaram à palavra derivada o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

Embora as actividades que os alunos desenvolveram ao longo desta experiência de ensino tivessem privilegiado uma interpretação gráfica da derivada de uma função num ponto, alguns alunos tiveram uma certa dificuldade em se libertar de um pensamento mais analítico a respeito da derivada de uma função num ponto. Para esses alunos, o conceito de derivada parecia estar, de certo modo, divorciado da sua interpretação geométrica. O esquema conceptual destes alunos mostrava uma faceta numérica e analítica, um pouco separada de imagem gráfica.

Alguns alunos, para se referirem ao conceito de derivada de uma função num ponto, estabeleceram conexões geométricas e analíticas do conceito, ou seja, construíram um conceito misto de derivada.

Quadro 6.2 — Conceito de derivada

Alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica	Alunos que privilegiaram uma estratégia analítica
• Referiram-se à recta tangente à curva no ponto e à tangente trigonométrica do ângulo que essa recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx.	• Conceito de derivada divorciado da sua interpretação geométrica. Esquema conceptual numérico e analítico separado de imagem gráfica.

Resumo do capítulo: Os alunos envolvidos nesta experiência de ensino visualizaram a determinação da derivada de uma função num ponto através de algumas situações dinâmicas de rectas secantes que se aproximavam da recta tangente à curva nesse ponto, proporcionadas pelo programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus*. Alguns alunos nem sempre conseguiram estabelecer conexões adequadas entre a interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto e o limite da razão incremental.

Os alunos usaram estratégias diferentes na determinação da derivada de uma função num ponto. Uns optaram por uma estratégia geométrica, outros recorreram a uma estratégia analítica. Alguns alunos utilizaram ainda os dois tipos de estratégias na resolução da mesma questão e que denominamos de estratégias mistas.

O cálculo da derivada da função em pontos de descontinuidade nem sempre foi uma tarefa que os alunos desempenharam com facilidade. De uma maneira geral, afirmaram que a função não tinha derivada nesses pontos, pelo facto de não ser contínua no ponto, mostrando, deste modo, não fazerem qualquer tipo de diferença entre derivada e derivada finita. Viram-se, ainda, confrontados com outros tipos de dificuldades, quando tiveram que calcular as derivadas de funções em pontos de descontinuidade: traçado de secantes e o cálculo de derivadas laterais infinitas.

Os "bicos" foram considerados, por alguns alunos, como pontos em que não existia derivada, por serem diferentes as suas derivadas laterais. Surgiram, no entanto, algumas respostas e justificações pouco claras no cálculo da derivada da função nesses pontos. Alguns alunos consideraram os "bicos" com sendo vértices de parábolas e, como consequência, a derivada nesses pontos seria nula. Outras respostas incorrectas foram originadas pelo traçado das secantes ou pelo traçado das tangentes. O ponto móvel, muitas vezes, afastava-se do ponto fixo. As tangentes nesses pontos eram rectas horizontais para, desse modo, tocarem a curva representativa da função apenas num ponto, e estarem de acordo com um conceito de tangente como a recta que tem apenas um ponto em comum com a curva e todos os outros pontos exteriores a ela (conceito originado pela definição de recta tangente a uma circunferência).

Os alunos, de uma maneira geral, mostraram uma certa relutância em afirmar que a derivada de uma função num ponto era infinita. Para alguns deles, as rectas tangentes nunca ficavam numa posição vertical.

O traçado das tangentes e semi-tangentes às curvas representativas de funções, em determinados pontos, nem sempre se manifestou uma tarefa imediata. Experiências anteriores da tangente a uma circunferência introduziram nos alunos uma crença de que a tangente é uma recta que toca o gráfico num ponto e não o atravessa. Esta crença parece ter causado conflitos cognitivos quando foram considerados outros casos como, por exemplo, a tangente num ponto de inflexão, onde a recta tangente atravessa a curva, o caso da tangente num "bico" e ainda nos pontos em que muda a expressão analítica da função.

Muitas destas dificuldades foram ultrapassadas através das interacções que se criaram durante a experiência de ensino entre a professora e/ou a investigadora e os alunos.

Os alunos construíram conceitos diferentes de derivada de uma função num ponto, coerentes com as estratégias privilegiadas na determinação da derivada da função num ponto. Assim, alguns alunos associaram à palavra derivada o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto — conceito geométrico. Outros alunos apresentaram um conceito ligado a regras e fórmulas — conceito analítico. Por vezes, alguns alunos utilizaram uma linguagem simultaneamente geométrica e analítica para se referirem à derivada de uma função num ponto e que considerámos tratar-se de alunos que construíram um conceito misto de derivada, um conceito mais rico.

Capítulo 7

Função derivada

Depois de nos dois capítulos anteriores (5 e 6) se caracterizarem os processos utilizados pelos alunos na determinação do declive de uma recta e na determinação da derivada de uma função num ponto, neste capítulo, descreve-se, analisa-se e intrepreta-se o modo como os alunos relacionaram o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada — terceiro objectivo específico deste estudo. Usaram-se dados das fichas de trabalho realizadas pelos alunos e dos registos efectuados no Diário da investigadora no final de cada aula mas, para fazer esta caracterização foram fundamentais os diálogos travados entre os alunos ou entre os alunos e a investigadora enquanto desenvolviam as actividades.

O capítulo está estruturado em três secções. Na primeira, caracterizam-se os processos desenvolvidos pelos alunos na representação gráfica da função derivada. Esta secção está dividida em três subsecções que dizem respeito às diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para levar a cabo essa representação. Na segunda secção, caracteriza-se o modo como os alunos representaram gráficos plausíveis de uma função a partir do gráfico da função derivada. Por último, apresentam-se as justificações que os alunos deram para relacionar o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada e vice-versa.

7.1. Representação gráfica da função derivada

Como já foi referido, o programa *A Graphic Approach to the Calculus* permite o traçado gráfico de uma função a partir da introdução da sua expressão analítica e ainda a sobreposição do gráfico da respectiva função derivada sem necessidade de se indicar a expressão analítica que define esta última.

Todas as questões da ficha III, subordinada ao tema — Função Derivada — tinham como objectivo primordial proporcionar aos alunos a visualização da representação gráfica da função derivada de algumas funções, de uma forma dinâmica para, em seguida, utilizarem o gráfico dessa função para determinarem a derivada em determinados pontos. Os alunos tiveram oportunidade de observar o traçado de rectas tangentes à curva representativa da função em vários pontos e viram "nascer" no ecrã do computador pontos cuja abcissa coincidia com a abcissa do ponto em que se traçava a recta tangente e cuja ordenada era o declive dessa recta. Da união de todos esses pontos, resultava o gráfico da função derivada.

Alguns alunos interpretaram de uma forma adequada este processo utilizado pelo software para traçar o gráfico da função derivada. Mais tarde, esses alunos, para desenvolverem actividades do mesmo tipo, sem recorrer ao computador, utilizaram estratégias baseadas nesse processo.

Outros alunos, no entanto, manifestaram alguma dificuldade em perceber o processo utilizado pelo *software* para sobrepôr ao gráfico da função o gráfico da sua função derivada, o que não lhes facilitou as tarefas quando, eles próprios, tiveram que traçar, em papel, a partir do gráfico da função (de que não era apresentada a respectiva expressão analítica), o gráfico da sua função derivada. Esses alunos viram-se confrontados com uma sequência de quatro tarefas distintas: descobrir a expressão analítica da função representada graficamente; determinar a expressão analítica da sua função derivada através das regras de derivação; gerar pares de valores a partir da expressão obtida; traçar o gráfico da função derivada.

Os processos utilizados pelos alunos para representaram o gráfico da função derivada a partir do gráfico da função parecem ser consequência do desenvolvimento de diferentes estratégias aquando da determinação do declive de uma recta e da determinação da derivada de uma função num ponto, que caracterizámos nos dois capítulos anteriores. Assim, foi possível verificar que os alunos utilizaram estratégias diversificadas para representarem o gráfico da função derivada — alguns demonstraram, nas suas respostas, ter recorrido directamente à representação gráfica da função e à determinação do declive da recta tangente ao gráfico dessa função em alguns pontos — estratégia que denominámos de geométrica; outros desenvolveram as actividades recorrendo a fórmulas e regras de derivação, sem nunca se referirem, por exemplo, à recta tangente à curva representativa da função no ponto — estratégia que denominámos de analítica. Alguns alunos, utilizaram estratégias mistas para levar a cabo as tarefas.

7.1.1. Estratégia geométrica

Os alunos que considerámos terem utilizado uma estratégia geométrica na representação gráfica da função derivada, de uma maneira geral, observaram o gráfico da função e determinaram o declive de rectas tangentes ao gráfico da função em determinados pontos.

Na questão 2 da ficha IV eram dados os gráficos de quatro funções (figura 7.1) e pedia-se aos alunos que traçassem, no mesmo referencial, o gráfico da sua função derivada.

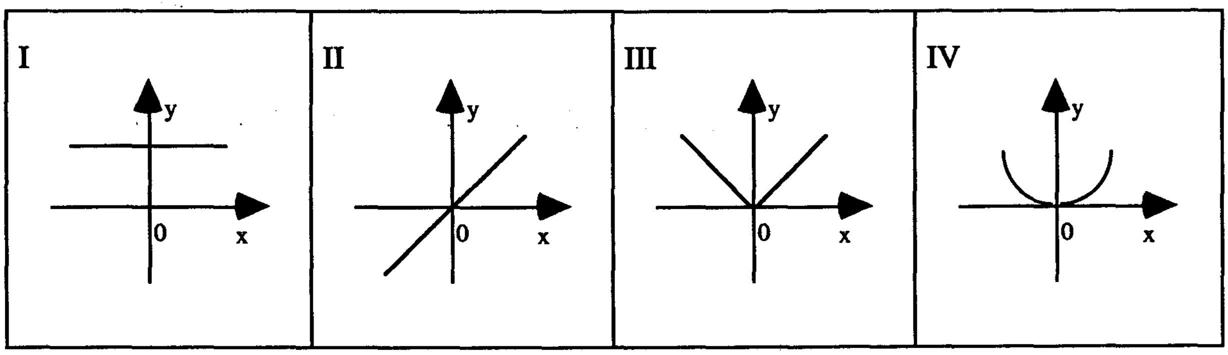


Fig. 7.1 - Gráficos da questão 2 da ficha IV

Em relação ao gráfico I, o Luís Filipe e o Zé afirmaram, de imediato, tratar-se do gráfico de uma função constante, e concluíram, possivelmente pensando no declive de rectas tangentes ao gráfico da função, que a sua função derivada coincidia com o eixo dos xx.

> L. Filipe: A derivada lá de cima [da função I] é zero. É a derivada aqui [aponta o eixo dos xx]. É aqui o eixo dos xx.
>
> Zé: Claro. É mesmo o eixo dos xx.

Estes alunos não recorreram à representação analítica da função para, em seguida, determinarem a sua função derivada. A observação gráfica foi suficiente para que estes alunos imaginassem rectas tangentes ao gráfico da função com declive nulo.

Em relação a essa mesma função, o Filipe observou o gráfico e, sem dar qualquer outra explicação afirmou:"f'(x) = 0" e traçou uma recta coincidente com o eixo dos xx.

Para determinar a função derivada da função III (figura 7.1) afirmou o Filipe:

Filipe: À direita de zero o declive é 1, à esquerda de 0 é -1 [e traça o gráfico (figura 7.2)].

Inv: O que é que acontece no ponto zero?

Filipe: A derivada à esquerda é diferente da derivada à direita.

[E escreve: $f' = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$]

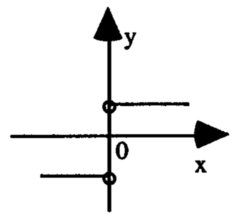


Fig. 7.2 - Gráfico da derivada da função III da questão 2, ficha IV, feito pelo Filipe

O Filipe observou o gráfico e deu atenção ao que se passava à direita e à esquerda do ponto de abcissa zero. Determinou os declives das duas semi-rectas. O modo como o Filipe falou da derivada: $f' = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$, mostra que este aluno identificou a função derivada como uma função. O traçado de semi-rectas paralelas ao eixo dos xx e a exclusão do ponto de abcissa 0 no gráfico da função derivada, não perturbaram este aluno que, apesar de não apresentar grandes explicações escritas, deu uma resposta que evidenciou uma rica compreensão rica dos conceitos envolvidos.

Para traçar o gráfico da função derivada da função IV (figura 7.1), alguns alunos utilizaram uma estratégia baseada directamente no processo que tinham visualizado no ecrã do computador.

Sabiam que o gráfico da função derivada de uma função quadrática era uma recta (os alunos já tinham construído esse conceito, através do desenvolvimento de actividades anteriores, apoiadas pelo computador). Assim, determinaram apenas a derivada da função em dois pontos. Para facilitar a resolução, escolheram o vértice da parábola, que sabiam ter derivada nula. Assinalaram outro ponto sobre a curva e traçaram a recta tangente à curva nesse ponto. Determinaram um valor aproximado do declive dessa recta determinando o quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x. Esse

resposta sem avaliar pormenorizadamente a situação, era prudente. Excluía metodicamente cada um dos gráficos, assinalando as razões porque o fazia.

Paulo: É o **C**. [Olhou para os gráficos e, rapidamente, afirmou que era o **C**].

Cris: Eu ainda não vi... Tem que ser aberto no ponto 2. Então o **E** não é. O **A** também não é. Até ao 2 tem que ser positiva e depois do 2 tem que ser negativa. O **C** é positiva até ao 2 e negativa a seguir e não está definida no ponto 2, logo é o **C**. No ponto $x = 2$, não existe derivada porque à direita a derivada é negativa e à esquerda é positiva.

O Luís Filipe manifestou pouca convicção ao afirmar que o gráfico da função derivada era o gráfico **C**. Interpretou correctamente a diferença existente entre os gráficos **C** e **E** "o **E** diz que tem derivada no ponto 2 e o **C** diz que não tem". Repare-se como estes alunos que utilizaram estratégias mais geométricos no desenvolvimento das actividades tornam os gráficos vivos. Para estes alunos, os gráficos até parecem falar "[o gráfico] **E diz** que...". O Luís Filipe parecia colocar a hipótese de ser nula a derivada da função no ponto $x = 2$, parecendo identificar esse "bico" com o vértice de uma parábola, mas acabou por responder de uma forma adequada.

Mafalda: Não sei... Mas parece-me o **A** ou o **E**.

L. Filipe: O **A** não é. Porque se aqui a derivada é negativa, a função tinha que ser decrescente e ela é crescente até ao ponto 2.

Mafalda: Pois é.

L. Filipe: Então ou é o **C** ou o **E**. Só que o **E** diz que tem derivada no ponto 2 e o **C** diz que não tem. Mas... na verdade, no ponto 2 a função não tem derivada. Aqui em cima neste ponto não tem derivada. Se fosse uma curva é que era o **E**. Assim é o **C**.

Inv: Então, Luís?

L. Filipe:Aqui na pergunta 7 é que nós temos dúvidas. Mas parece-me que é o **C** ou o **E**, mas deve ser o **C**, porque a função não tem derivada no ponto 2. Se aqui fosse uma curva é que tinha derivada no ponto 2, mas assim não tem.

O Luís Filipe acabou por perceber a diferença entre os dois tipos de variação (num "bico" e no vértice de uma parábola) e respondeu correctamente à questão.

Em resumo: Nas actividades que envolviam a escolha de entre várias funções representadas graficamente aquela que representava a função derivada de uma função de que se apresentava também o respectivo gráfico levou os alunos a argumentações que relacionavam a monotonia da função com o sinal da função derivada e ainda à determinação da derivada de uma função em determinados pontos críticos. De uma maneira geral, os alunos não evidenciaram grandes dificuldades na realização dessas tarefas. Estabeleceram conexões dinâmicas entre os gráficos que nos parecem ser uma das consequência de uma experiência de ensino que privilegiou o estudo das derivadas a partir de um ambiente recheado de gráficos. Para estes alunos, os gráficos não eram figuras estáticas, representavam informação que os alunos tratavam de uma forma viva, cheia de movimento.

Resumo do capítulo: Ao longo deste estudo foi-nos possível observar que os alunos embora não estivessem muito habituados de anos anteriores a resolver questões baseados exclusivamente em representações gráficas, a sua maioria aderiu com entusiasmo a um método de trabalho baseado fundamentalmente nas representações e interpretações gráficas de funções.

As diferentes estratégias que os alunos utilizaram na determinação do declive de uma recta e na determinação da derivada de uma função num ponto, implicaram também estratégias diversificadas na representação gráfica da função derivada de uma função apresentada na sua forma gráfica. Assim, continuámos a identificar o mesmo tipo de estratégias já caracterizadas nos dois capítulos anteriores — estratégia geométrica, estratégia analítica e estratégias mistas.

Os alunos que utilizaram uma estratégia geométrica na representação gráfica da função derivada, estabeleceram conexões imediatas entre derivada de uma função num ponto e declive da recta tangente à curva nesse ponto.

Uma aluna, continuou a privilegiar uma estratégia analítica perante a tarefa de representar, graficamente, a função derivada de uma função apresentada na sua forma gráfica. Assim, esta aluna começou por fazer a tradução gráfico—expressão analítica para, em seguida aplicar regras de derivação e obter a expressão analítica da função derivada. A indicação de uma regra de derivação não implicava, para esta aluna, a imagem gráfica da função derivada. Por exemplo, a derivada de uma função constante reduzia-se a um ponto, o ponto de coordenadas (0, 0). O gráfico da derivada de uma função afim coincidia com o gráfico da própria função ainda que verbalizasse que a derivada desse tipo de funções era constante. Esta aluna sabia que o parâmetro **m** representava o declive da recta $y = mx + b$ mas, esse conhecimento não implicava a imagem da recta de equação $y = m$.

Os alunos que utilizaram estratégias mistas no desenvolvimento das actividades demonstraram possuir flexibilidade na exploração de ideias matemáticas e na experimentação de métodos alternativos de resolução de problemas. Estes alunos que conseguem aplicar e fazer a tradução entre representações diferentes da mesma situação ou do mesmo conceito matemático terão, à partida, um conjunto de ferramentas poderosas e flexíveis e uma compreensão mais profunda da consistência e beleza da Matemática.

De início, alguns alunos reagiram manifestando algumas dificuldades nas tarefas em que era pedido um gráfico plausível de uma função, dado o gráfico da função derivada. As principais dificuldades manifestadas pelos alunos prenderam-se com o facto destes terem usado algumas analogias entre os gráficos da função derivada e o gráfico da função que nem sempre os conduziu a respostas aceitáveis.

Todos os alunos que utilizaram estratégias geométricas para representar um gráfico plausível de uma função, dado o gráfico da função derivada, mostraram possuir uma boa compreensão do significado gráfico de uma variação constante e de uma variação na variação. Estes alunos sabiam como representar graficamente uma função crescente com uma taxa de variação também crescente e uma função decrescente com uma taxa de variação decrescente. Estes alunos preocuparam-se em traçar um gráfico da função de modo que não existisse nenhum ponto de variação brusca para assim garantir a continuidade da função derivada.

A Cristiana, uma aluna que ao longo desta intervenção didáctica privilegiou estratégias analíticas de resolução das questões, nestas actividades continuou a manifestar essa preferência. Assim, perante o gráfico da função derivada pensou em expressões analíticas de funções do primeiro e do segundo grau para poder afirmar que a sua derivada era, no primeiro caso, uma função representada por uma recta horizontal e, no segundo caso, uma função afim. A Cristiana fez, assim, aquilo que poderíamos designar como uma pré-primitivação.

Os alunos não evidenciaram dificuldades no desenvolvimento das actividades que envolviam a escolha de entre várias funções aquela que representava a função derivada de uma dada função. Relacionaram a monotonia da função com o sinal da função derivada e determinaram a derivada da função em pontos críticos. Estabeleceram conexões dinâmicas entre os gráficos que nos parecem ser uma das consequência de uma experiência de ensino que privilegiou o estudo das derivadas a partir de um ambiente recheado de gráficos. Para estes alunos, os gráficos não eram figuras estáticas, representavam informação que os alunos tratavam de uma forma viva.

Capítulo 8

Apreciação da intervenção

Para além das actividades que tinham como principal objectivo ajudar os alunos a construir conceitos relacionados com o estudo das derivadas e que foram alvo de análise e interpretação nos três capítulos anteriores, foram propostas outras actividades, não com o propósito de comparar os desempenhos destes alunos com o dos estudantes das turmas que não participaram directamente nesta intervenção, mas para analisar realizações que nos forneceram também informações importantes sobre competências e concepções na aprendizagem da Matemática. Assim, nas duas primeiras secções deste capítulo, apresentamos os desempenhos dos alunos no desenvolvimento de actividades adaptadas de outras investigações e nos testes de avaliação. As opiniões dos alunos e da professora sobre a intervenção didáctica constituem as duas secções seguintes. A forma como os alunos aprenderam e fizeram matemática são dados úteis para uma apreciação da intervenção e constitui a quinta secção do capítulo. Por último, apresenta-se uma perspectiva da intervenção didáctica.

8.1. Desempenho dos alunos em actividades contempladas noutras investigações

Nesta secção, apresentamos os desempenhos dos alunos em quatro actividades contempladas noutras investigações: *enchimento de recipientes com formas diferentes* (questão 1 da ficha IV, proposta sensivelmente a meio da intervenção); *confusão entre declive e altura* (questão 4 da ficha IV, proposta sensivelmente a meio da intervenção); *recta tangente como limite das rectas secantes* (questão 3 da ficha V, proposta na segunda metade da intervenção); *relação entre as aproximações pelas secantes num intervalo e a derivada de uma função num ponto* (questão 6 do último teste de avalição, realizado no final da intervenção).

As duas primeiras actividades são contempladas ou referidas em várias investigações que envolvem a interpretação de gráficos. São situações do dia-a-dia em que está presente a relação entre função e derivada. Trata-se de tarefas muito ricas que comparam diversos modos de variação. O comportamento de uma função num intervalo pode ser compreendido através da interpretação de gráficos e, de uma maneira especial, de gráficos que representem situações da vida real. Assim, introduzimo-las nesta investigação para percebermos os desempenhos dos alunos envolvidos numa experiência de ensino que valorizou uma interpretação e exploração gráfica dos conceitos da Análise. As outras duas actividades estão directamente ligadas aos objectivos específicos desta investigação.

8.1.1. Enchimento de recipientes de diferentes formas

O trabalho com gráficos incluídos nos programas tradicionais tem valorizado interpretações locais de funções, quer grafica quer analiticamente. A maior parte dos gráficos fora da sala de Matemática mostram características de alguma situação real. São exemplo disso os gráficos de tendência da inflação ou dos preços das casas, da taxa de descida de radioactividade, etc. O que precisa de ser ensinado aos alunos é como ler e interpretar tais gráficos; isto inclui não apenas a leitura de pontos e a identificação de extremos, como comparações globais e, em particular, o conhecimento dos tipos básicos de variação. Estes aspectos de compreensão foram investigados por Janvier (1978) que detectou dificuldades na interpretação de gráficos e, em particular, nos gráficos que envolviam a escolha dos tipos de variação — linear, curva, etc. Segundo Janvier, mesmo quando um aluno reconhecia que uma função era crescente, muitas vezes, era-lhe difícil indicar o tipo de variação que tinha lugar e relacioná-la com o gráfico. Devia o gráfico ser uma linha recta ou uma curva? A curva devia ser côncava ou convexa?

A actividade do enchimento dos recipientes foi adaptada da investigação de Ponte (1984). Tem como principal objectivo compreender os processos utilizados pelos alunos na interpretação de gráficos o que segundo aquele investigador implica compreender os processos envolvidos na interpretação da variação e da variação na variação. O estudo da variação inclui a determinação de intervalos de crescimento, decrescimento e constante e os pontos de valores máximos e mínimos. De acordo com Ponte, a variação na variação constitui, para os alunos, o mais complexo e difícil aspecto da compreensão de gráficos. Envolve noções relacionadas com razões de variação, tais como mudanças mais lentas ou mais rápidas, mudanças lineares ou não lineares, variações contínuas e descontínuas, variações regulares ou não regulares. Ponte, baseado em muitas outras actividades e não apenas nas de enchimento de recipientes, concluiu que os alunos tiveram bastantes dificuldades em distinguir situações de variação linear de situações de variação não linear. Todos os alunos conseguiram traçar correctamente os gráficos de enchimento dos recipientes de variação linear. No entanto, três de entre cinco alunos tiveram problemas quando a taxa de variação mudou num determinado ponto e todos tiveram problemas quando a taxa de variação mudava continuamente num intervalo.

Vejamos como é que os alunos envolvidos na nossa experiência de ensino reconheceram os diferentes tipos de variação e como a traduziram graficamente?.

A partir dos gráficos traçados pelos alunos, podemos perceber se interpretaram de uma forma correcta características globais desses gráficos no que diz respeito à sua forma geral, quer aos intervalos de monotonia, aos intervalos de mais rápido crescimento ou de decrescimento mais lento.

Tratamos as questões separadamente uma vez que, embora versando o mesmo tema, obrigavam a raciocínios um pouco diferentes.

A questão 1 referia-se à representação gráfica da relação existente entre o tempo de enchimento, a partir de uma torneira de caudal constante e a altura atingida pela água em recipientes de diferentes formas. Vamos ainda separar a análise das respostas dadas pelos alunos à questão 1.a), das respostas dadas à questão 1.c). Na questão 1.a), os gráficos de enchimento dos vasos eram representados por rectas. Na questão 1.c), o primeiro gráfico de enchimento era representado por segmentos de recta com declives diferentes; os restantes gráficos eram curvas, uma vez que, a variação da altura da água em cada intervalo de tempo não era uniforme.

Na primeira questão, pedia-se aos alunos que traçassem os gráficos de enchimento de dois recipientes **B** e **C**, no referencial em que se encontrava traçado o gráfico de enchimento do recipiente **A** (figura 8.1).

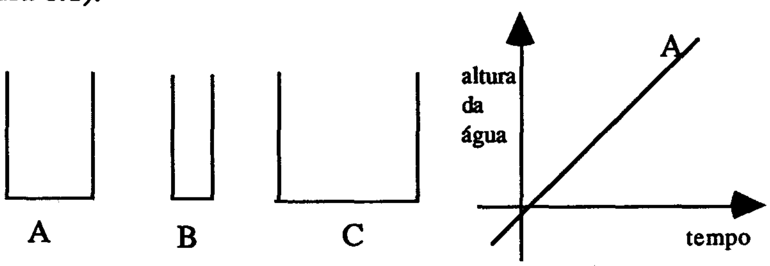


Fig. 8.1 - Esquema da questão 1 da ficha IV

O Luís Carlos e o Filipe resolveram esta questão com todo o pormenor. Compararam as larguras dos vasos e concluíram que a capacidade do vaso **A** era dupla da do vaso **B** e que a capacidade de **C** era dupla de **A**. Traçaram a recta representativa do enchimento do recipiente **C** de modo que o ângulo que esta recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx fosse aproximadamente metade do ângulo que a recta **A** fazia com o mesmo eixo. Traçaram a recta que traduzia o enchimento do recipiente **B,** de modo que o ângulo que essa recta fazia com o semi-eixo positivo dos xx fosse o dobro do ângulo que a recta **A** fazia com o mesmo eixo. Depois de algum debate, os alunos concluíram que os declives das rectas não eram proporcionais à amplitude dos ângulos que as rectas faziam com o semi-eixo positivo dos xx.

Esta questão foi resolvida pelo Luís Carlos e pela Ana Luísa numa aula em que o Filipe faltou. Posteriormente, o Luís Carlos voltou à mesma questão trabalhando com o Filipe.

L. Carlos: O C... a inclinação... não. O B enche muito mais rápido. O [gráfico de] B é bem mais inclinado. O dobro da inclinação até...

É uma constante ao longo desta experiência de ensino, o Luís Carlos referir a palavra inclinação como sinónima de declive.

A. Luísa: E o [gráfico] C é que é mais "deitado"?

Os alunos referem-se aos gráficos associando-lhes movimento.

L. Carlos: C há-de ter metade da inclinação do A, mais ou menos.

A. Luísa: Não sei se percebi. Era mais rápido a encher...

L. Carlos: Pensando que está certo aquilo que eu disse, que este [o C] é o dobro de A e o A é o dobro de B... Se o caudal é o mesmo... e a área de enchimento é metade, logicamente que ele vai encher no dobro do tempo. Para cada x eu vou ter... Como a área deste aqui [o B] é metade deste [o A]... A altura do enchimento vai ser o dobro. Ou seja, para cada x_1, este aqui vai dar um y_1, para o recipiente B vai ser o dobro.

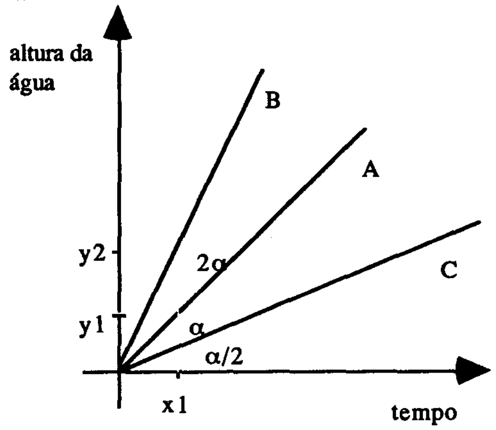


Fig. 8.2 - Esquema elaborado pelo Luís Carlos para representar os gráficos do enchimento dos recipientes da questão 1 da ficha IV

[Traçou o gráfico da figura 8.2]. Portanto, no gráfico, o crescimento da recta B vai ser o dobro da recta A, porque a área de B é metade da área de A, portanto a altura... é que falar em altura é que é um bocado confuso.

O Luís Carlos descreveu a situação correctamente. Contudo, de início, não foi imediato o relacionamento das variáveis tempo e altura "é que falar em altura é que é um bocado confuso". A investigadora dá uma sugestão para ajudar o aluno a ultrapassar essa dificuldade.

Inv: O que está aí a representar [no eixo dos yy] é a altura.

L. Carlos: Pois. E o A está a encher... Se em metade do tempo que A demora a encher, o B enche, se aqui é o eixo do tempo, logo numa unidade de tempo, vai encher o dobro do que encheu o de A. Portanto, cresce muito mais rapidamente. O declive, agora falando na recta, tem o dobro do declive da recta A.

Repare-se que o aluno indicou no seu esquema (Fig. 8.2) a amplitude dos ângulos proporcionais: α, 2α e $1/2\alpha$. Por isso a investigadora intervém, deliberadamente, no sentido ajudar o aluno a reflectir nessa questão.

Inv: O ângulo poderá não ser exactamente o dobro, porque uma recta de 45^{o} não tem o declive exactamente igual ao dobro do declive de uma recta com uma inclinação de $22{,}5^{o}$.

L. Carlos: Agora essa aí... Está-me a deixar baralhado.

Inv: Pense lá nisso... Será exactamente o dobro?

L. Carlos: Uma recta tem uma inclinação ß, não é?

Inv: Sim.

L. Carlos: Se fizer uma inclinação 2ß, a tangente não é forçosamente o dobro. Não é, não. É próximo mas não é exactamente o dobro.

O Filipe, no desenvolvimento desta actividade, fez a tradução das representações gráficas nas correspondentes representações analíticas e escreveu: $y=mx+b$; $y_A = x$; $y_B = 2x$; $y_C=1/2x$.

O Filipe pensou de imediato na relação existente entre os declives das rectas e evidenciou uma tradução correcta: representação gráfica—>representação analítica.

Filipe: No mesmo tempo aqui [assinala um ponto a que chama x sobre o eixo dos tempos e a correspondente imagem em relação ao gráfico A, a que chama y] o B enche mais, enche o dobro [sobe na vertical e marca sobre o eixo dos yy 2y, de acordo com a figura 8.3]. A altura da água vai parar aqui.

Inv: Sim...

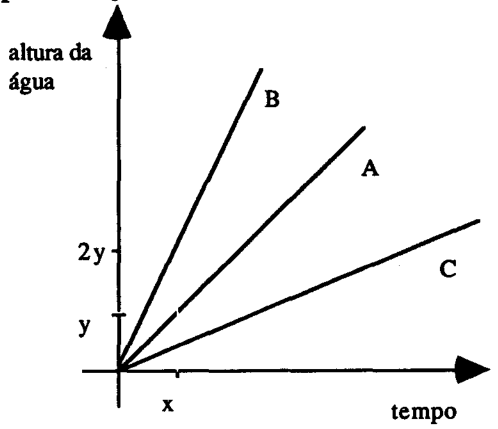


Fig. 8.3 - Esquema elaborado pelo Filipe para representar os gráficos do enchimento dos recipientes da questão 1 da ficha IV

Filipe: No mesmo tempo, o C enche metade, por isso vai parar aqui.

[Entretanto o Filipe escreve as expressões $y = mx+b$; $y_A = x$; $y_B = 2x$; $y_C = 1/2x$];

L. Carlos: O tempo de enchimento vai ter uma relação.

Filipe: É exactamente o dobro.

L. Carlos: Se houver uma relação entre as áreas e considerando que o volume de água que cai é sempre o mesmo...

Filipe: É exactamente o dobro.

L. Carlos: Estamos a falar na mesma altura, e larguras diferentes.

[O Filipe faz um esquema do que poderia ser a base de cada um dos recipientes. ]

L. Carlos: Eles só variam na largura, então o enchimento tem que ser esse.

Filipe: É o dobro. Neste caso o declive é o dobro.

L. Carlos: O declive é o dobro, no entanto a inclinação pode não ser exactamente o dobro.

O Luís Carlos, com o apoio da investigadora, ultrapassou a dificuldade de considerar que uma recta com um declive duplo de outra tinha também uma inclinação dupla.

O Luís Carlos e o Filipe não referiram a altura atingida pela água. Preocuparam-se com a comparação dos declives das rectas que representavam os gráficos.

Em relação à mesma questão, a Cristiana afirmou: "Como os recipientes **A**, **B** e **C** têm a mesma altura, mas a largura é diferente, quanto mais estreito for o recipiente, mais rapidamente se enche". O Paulo disse: "O **B** enche em menos tempo pois não precisa de muita água, ao contrário do **C** que demora mais tempo, pois precisa de mais água. A altura, é igual nos três". O Paulo fala em termos de precisar de mais ou menos água e em demorar mais ou menos tempo a encher. Não fala em declives.

Crist: O B é mais rápido, por isso fica mais a pique [e desenha o gráfico B (figura 8.4)], tem um declive maior. Os recipientes, têm todos a mesma altura?

Inv: Sim, sim. O que é que o Paulo respondeu em relação à 1ª questão?

Paulo: Eu respondi que o B enche em muito menos tempo, enquanto que o C demora mais tempo a encher.

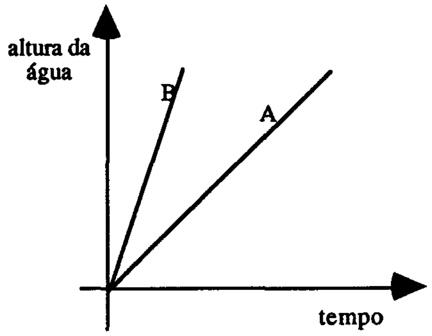


Fig. 8.4 - Esquema elaborado pela Cristiana para representar os gráficos do enchimento dos recipientes da questão 1 da ficha IV

O Paulo, com a mão indicou a inclinação das rectas que representavam o gráfico do enchimento de cada recipiente.

Nesta passagem são visíveis algumas das influências que esta experiência de ensino pode ter exercido no modo como a Cristiana se referiu aos gráficos. Esta aluna exprimiu-se com termos menos formais, "o B [enche] é mais rápido, por isso [a recta] fica mais a pique" sem manifestar grande preocupação com rigor, regras e fórmulas.

O Luís Filipe e o Zé preocuparam-se com o facto de a altura dos recipientes ser a mesma. Nenhum dos outros alunos tinham mostrado esse cuidado. Estes alunos manifestaram também uma grande necessidade em comparar, com exactidão, as capacidades dos recipientes.

L. Filipe: Se aquela linha representa o enchimento do A..., se o B é metade do A leva metade do tempo a encher...

Zé: O quê?

L. Filipe: Se B é metade do A, leva metade do tempo a encher... É natural. E o C é o triplo.

Zé: É o dobro.

L. Filipe: É o triplo de B. Leva 3 vezes o tempo que o B levou.

Zé: Tens a certeza que é o triplo de B?

L. Filipe: Certeza absoluta. Se o B é metade do A leva metade do tempo a encher. Se o C é três vezes o B, leva três vezes mais tempo que B. Afinal temos isto mal. O gráfico do C não é assim. Será que é?

Zé: Claro que é. Como é que querias que fosse?

L. Filipe: Porque a altura da água tem que ser a mesma, não é?

Zé: Sim...

L. Filipe: O tempo tem que ser repartido em divisões iguais. Isto tem que estar mais ou menos aqui assim [risca a linha anterior e faz uma recta com um declive um pouco maior (figura 8.5)]. E esta tem que estar mais ou menos à mesma distância, percebeste?

Zé: És capaz de ter razão...

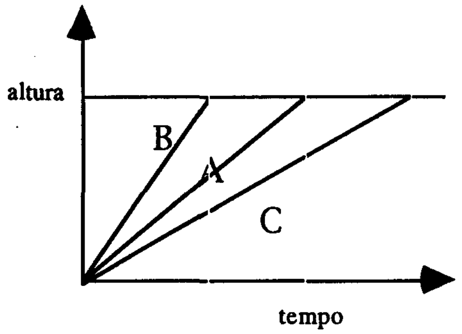


Fig. 8.5 - Esquema elaborado pelo Luís Filipe para representar os gráficos do enchimento dos recipientes da questão 1 da ficha IV

L. Filipe: O ângulo não é assim tão acentuado. Claro que tenho razão. Lá em cima o tempo tem que ser proporcional.

O Luís Filipe considerou que, para a mesma altura atingida pela água nos três recipientes, o tempo variava de recipiente para recipiente. Dividiu o eixo do tempo em três partes iguais por ter considerado que o tempo de enchimento era proporcional às larguras dos recipientes.

Podemos concluir que todos os alunos envolvidos nesta intervenção didáctica conseguiram representar de uma forma correcta e, por vezes, com um certo grau de rigor, os gráficos de enchimento de recipientes com uma variação constante.

Em relação à questão 1.c) da ficha IV, a maneira como, a maioria dos alunos, dividiu os recipientes em partes, mostrou a necessidade de esquemas para distinguir as várias situações:

ela cresce mas, a dada altura, cresce mais rapidamente (recipiente D, figura 8.6).

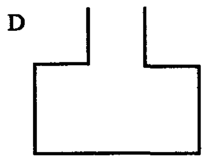


Fig. 8.6 - Gráfico da questão 1 da ficha IV.

O tipo básico de variação presente nestas representações contém variações contínuas num intervalo, tal como: cresce com uma taxa de variação decrescente (recipiente E, figura 8.7); cresce com uma taxa de variação crescente (recipiente F, figura 8.8); primeiro cresce com uma taxa de variação crescente, depois cresce com uma taxa de variação decrescente (recipiente G, figura 8.9).

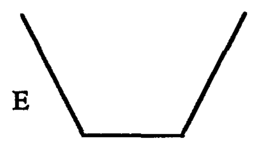


Fig. 8.7- Gráfico da questão 1 da ficha IV.

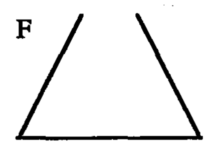


Fig. 8.8 - Gráfico da questão 1 da ficha IV.

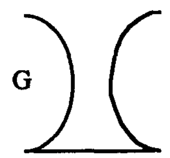


Fig. 8.9 - Gráfico da questão 1 da ficha IV.

Os alunos demonstraram ter adquirido uma compreensão de um contínuo crescimento com uma taxa de variação decrescente (E), de um contínuo crescimento com uma taxa de variação crescente (F) e da conjugação dos dois tipos de variação (G). Conheciam a diferença entre "crescer cada vez mais depressa", "crescer" e "crescer cada vez mais devagar". Dizia o Filipe: "No caso do recipiente E, à medida que o tempo passa, a altura da água cada vez sobe menos, no caso do recipiente F, como o vaso é cada vez mais estreito, à medida que o tempo vai aumentando, a altura da água sobe mais rapidamente, então aqui a curva é exactamente ao contrário". A palavra "subir" parecia estar a ser utilizada, com o significado de "crescer".

Filipe: No enchimento do D, vamos ter dois segmentos de recta, mas o segundo com um declive muito maior que o primeiro. Na parte de cima, o recipiente enche muito mais depressa. [Faz um gráfico igual ao da figura 8.10]. Para o mesmo tempo, a altura da água sobe muito mais.

No caso do recipiente E, à medida que o tempo passa, a altura da água cada vez sobe menos. [Faz um gráfico igual ao da figura 8.11].

Inv: O que acontece ao declive das várias tangentes?

Filipe: O declive vai diminuindo.

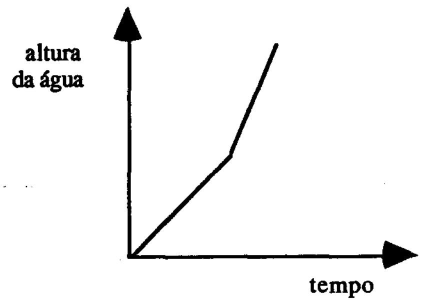


Fig. 8.10 - Gráfico feito pelo Filipe para representar o enchimento do recipiente D da questão 1c) da ficha IV.

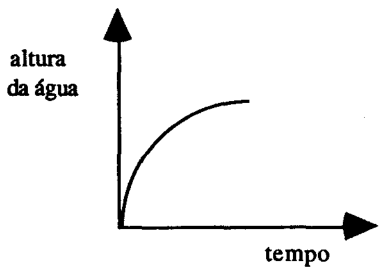


Fig. 8.11 - Gráfico feito pelo Filipe para representar o enchimento do recipiente E da questão 1c) da ficha IV.

No caso do recipiente F, como o vaso é cada vez mais estreito, à medida que o tempo vai aumentando, a altura da água sobe mais rapidamente. Então aqui a curva é exactamente ao contrário. [Faz um gráfico igual ao da figura 8.12].

Fig. 8.12 - Gráfico feito pelo Filipe para representar o enchimento do recipiente F da questão 1c) da ficha IV.

No caso do recipiente G, basta fazer a conjugação dos dois [Faz um gráfico igual ao da figura 8.13)].

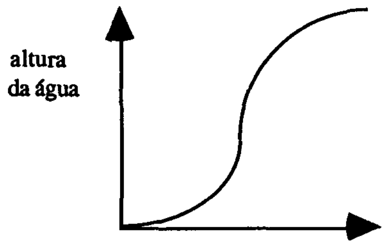


Fig. 8.13 - Gráfico feito pelo Filipe para representar o enchimento do recipiente G da questão 1c) da ficha IV.

O Luís Carlos continuou com o seu raciocínio minucioso de comparar capacidades, dividindo o recipiente em partes para traçar, com mais rigor, o gráfico.

L. Carlos: Vou dividir isto em três partes. [faz o esquema igual ao da figura 8.14]. O enchimento quando ele passa [no gargalo]... é que não é igual. Então supondo que a parte de baixo é 3 vezes a... portanto...

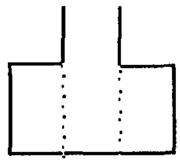


Fig. 8.14 - Esquema elaborado pelo Luís Carlos para representar o enchimento do recipiente D da questão 1c) da ficha IV.

Inv: Mas que pormenor...

L. Carlos: Tem que ter algum princípio...Portanto a inclinação é esta até ao gargalo, depois vai subir, o que ele subiu em três. Agora tens que relacionar é com a segunda inclinação. Este aqui vai encher 3 vezes mais depressa do que aqui em baixo. Esta parte aqui [do gargalo]... Como enche 3 vezes mais depressa, a altura que ele... não... o tempo que há-de ter é que é... a altura vai ser a mesma...

O meu raciocínio é assim: pronto, dividi esta parte em três e disse que são mais ou menos, iguais a esta, à parte de cima. O que interessa é o enchimento até aqui [ao gargalo] e depois o resto do enchimento. [Fez um gráfico igual ao da figura 8.15].

Inv: Sim...

L. Carlos: Supondo que isto demora 3 vezes a encher, como é que eu hei-de dizer?... Uma altura h, ele vai ter que encher em 1/3 do tempo o outro bocado.

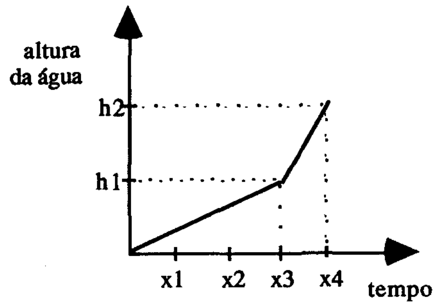


Fig. 8.15 - Gráfico feito pelo Luís Carlos para representar o gráfico de enchimento do recipiente D da questão 1c) da ficha IV.

O Luís Carlos refere inclinação das rectas em vez de declive, possivelmente por se tratar de uma palavra mais utilizada no dia-a-dia.

O Zé e o Luís Filipe, à semelhança do que tinha acontecido com os gráficos de enchimentos dos recipientes **B** e **C**, preocuparam-se com a quantidade de água para encher os recipientes e com o tempo que demorava esse enchimento. Comentaram: "se estes [referiam-se aos recipientes **D**, **E**, **F** e **G**] levassem a mesma quantidade de água, o tempo de enchimento seria o mesmo". De início, não estavam preocupados com o traçado do gráfico que poderia relacionar a altura da água, ao longo do tempo. Não usaram, explicitamente, no seu vocabulário, a palavra declive. Quando o Zé disse "o D vai enchendo de uma maneira constante, depois quando chega aqui [parte mais estreita] começa a encher mais depressa", desenhou um segmento de recta não horizontal, com um determinado declive e, em seguida, traçou uma semi-recta com um declive maior.

Zé: A gente não sabe a água que eles levam... tem que ser a olho, isto.

L. Filipe: Eles têm formas diferentes, mas se tiverem o mesmo...

Zé: Se tiverem o mesmo... o mesmo interior

L. Filipe: Por exemplo, o F e o G levam a mesma quantidade de água.

Zé: Se levam a mesma quantidade de água, levam o mesmo tempo.

L. Filipe: O tempo é igual. *Stora* ? O gráfico de enchimento?

Zé: Sim. Fazes assim: o D vai enchendo de uma maneira constante, depois quando chega aqui [parte mais estreita] começa a encher mais depressa.

A palavra constante, para o Zé significava, neste caso, linear, ou seja com uma variação constante.

L. Filipe: Já percebi. Faz um curvão. Então justifica lá este esquema. Até uma certa altura...

Zé: Até uma certa altura... quando o recipiente for mais estreito, enche mais depressa.

L. Filipe: E agora aqui no E?... Aqui é sempre constante.

O Luís Filipe, usou a palavra "constante" com um significado diferente. Aqui, a palavra "constante" poderia ser sinónima de um crescimento contínuo com uma taxa de variação decrescente, como se pode inferir pelas frases que o aluno usou em seguida: "quanto mais estreito é, mais rápido enche, então o tempo... então vai ter que ser uma curva"... "Vai aumentando, mas cada vez aumenta menos, porque demora mais tempo a encher"..

Zé: Não. Vai a decrescer. O vaso vai aumentando de largura...

L. Filipe: Quanto mais estreito é, mais rápido enche, então o tempo... então vai ter que ser uma curva.

Zé: Claro. A altura da água vai aumentando...

L. Filipe: Vai aumentando, mas cada vez aumenta menos, porque demora mais tempo a encher. É uma curvazita. Porque como o recipiente se torna mais largo demora mais tempo até a água ...

Em relação ao enchimento do recipiente F, os alunos pensaram em termos da "simetria" em relação ao gráfico anterior "este aqui, o F, é uma curva precisamente ao contrário". E o Luís Filipe acrescentou: "Com a concavidade voltada para cima, porque como o recipiente se torna mais estreito vai enchendo mais depressa".

Estes alunos referiram-se a um crescimento com uma taxa de variação decrescente "vai aumentando, mas cada vez aumenta menos" e a um crescimento com uma taxa de variação crescente "como o recipiente se torna mais estreito vai enchendo mais depressa".

A Cristiana e o Paulo não revelaram dificuldade em traçar o gráfico de enchimento do recipiente **D**. A frase "cada vez está a demorar mais tempo a encher" em relação ao enchimento do recipiente **E**, mostra que estes alunos tinham a noção de um crescimento com uma taxa de variação decrescente. Contudo, não conseguiram explicar convenientemente o seu raciocínio.

Crist: [Fez o gráfico de enchimento do recipiente D correcto]. Bem, isto está assim um bocado... mas acho que se percebe a ideia. Aqui ao princípio demora mais tempo e depois [a recta] é a pique.

Inv: Sim. E em relação ao E, o que é que acontece?

Crist: Cada vez está a demorar mais tempo a encher. [E desenha uma curva . O Paulo fez o mesmo.]

À semelhança dos alunos do grupo anterior, recorreram à propriedade da simetria, para traçarem os gráficos do enchimento dos recipientes **E** e **F**.

Crist: O F é ao contrário do anterior.

Inv: Gostava que me explicassem porque é que fizeram a curva e não , no E.

Crist: É curva porque vai aumentando aos bocadinhos e é voltada para baixo porque...

A Cristiana tinha a noção de que no gráfico de enchimento do recipiente **E**, a taxa de variação não era constante "vai aumentando aos bocadinhos".

Paulo: Voltada para cima era no F.

Inv: Mas porquê?

Crist: Isso depende do crescimento. No E começa com pouco e vai aumentando. No F é ao contrário.

Quando a Cristiana afirmou "começa com pouco e vai aumentando" referia-se ao tempo de enchimento. Como o recipiente era mais estreito na base, esta aluna sabia que, de início, demorava menos tempo a atingir uma determinada altura.

Todos os alunos conseguiram revelar um domínio forte da representação gráfica de um fenómeno físico com que estavam familiarizados. Nenhum aluno manifestou dificuldade em responder a estas questões. A facilidade com que os alunos desenvolveram estas actividades pode ser uma das consequências de uma experiência de ensino em que foi dada uma grande ênfase à interpretação de gráficos.

Em resumo: Todos os alunos que participaram nesta experiência de ensino foram bem sucedidos na construção e interpretação de gráficos que traduziam situações reais — relação entre o tempo e a altura de enchimento de recipientes com formas diferentes. Estas tarefas atraíram os alunos para interpretações globais do gráfico, mais do que para interpretações pontuais e podem ter sido um exemplo da influência positiva que pode ter a familiaridade com um contexto específico.

Os alunos foram encorajados a prestar atenção à dependência entre duas variáveis que lhes eram familiares e a traduzir essa dependência através de um gráfico. Esta abordagem mais qualitativa dos gráficos tem a vantagem de apelar ao senso comum e às intuições. Parece-nos possível acrescentar ainda que os alunos podem ter tido mais sucesso no desenvolvimento destas tarefas, uma vez que uma das variáveis envolvidas era o tempo.

Em relação aos gráficos de enchimento dos recipientes **B** e **C**, os alunos perceberam que se tratava de rectas com declives diferentes de acordo com a largura dos vasos. É interessante recordar a linguagem informal que os alunos utilizaram para justificar os declives das rectas " o B enche muito mais rápido", "o B enche mais rápido, por isso fica mais a pique", "o gráfico B é mais inclinado", "o gráfico C é mais deitado", "o ângulo (C) não é assim tão acentuado". Quando a razão de variação mudava continuamente num intervalo (enchimentos dos recipientes E, F e G) os alunos, embora não utilizando nas suas justificações a noção do declive como uma medida de inclinação da curva, expressaram essa ideia quando afirmaram: "vai aumentando aos bocadinhos", "cresce cada vez mais"... "a altura da água sobe cada vez menos", "está a demorar mais tempo a encher".

8.1.2. Confusão entre declive e altura

Vários investigações sublinham a confusão que os alunos fazem entre declive e altura, quer em tarefas de interpretação como de construção de gráficos (Clements, 1989; Janvier, 1978; McDermot *et al.*, citados em Leinhardt; Nemirovsky e Rubin (1992)).

De acordo com estes investigadores, um problema típico para mostrar as dificuldades conceptuais que os alunos têm com o declive e a altura, é o representado na figura 8. 16. De uma maneira geral, os alunos respondem que o carro que se desloca com mais velocidade, no instante t = 2, é o carro A, confundindo declive com altura.

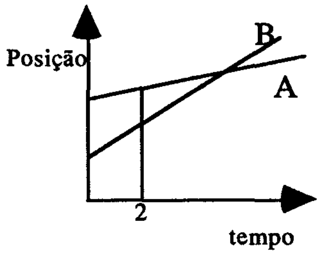


Fig. 8.16 - Gráfico utilizado em várias investigações para verificar se os alunos confundiam declive com altura.

Alguns autores (Clements, 1989; Janvier, 1987) apresentam duas fontes possíveis para estes erros: uma de representação ("mais alto" num gráfico cartesiano quer dizer "mais"), e uma conceptual (o declive de uma recta não tem significado para os alunos).

Janvier (citado em Ponte, 1984) pediu aos alunos o intervalo de mais rápido crescimento de uma função representada graficamente. Os alunos, não se procuraram com intervalos com maior declive, mas interpretaram como "maior crescimento em comprimento".

No nosso estudo, modificámos um pouco a actividade. Retirámos a situação real, com receio que a confusão pudesse ter a sua origem nos conceitos de Física envolvidos—velocidade e distância. Em vez de uma comparação num ponto, fez-se uma comparação num intervalo.

Assim, eram dados os gráficos de duas funções f e g (figura 8.17) e perguntava-se qual das funções crescia mais rapidamente no intervalo [2, 4].

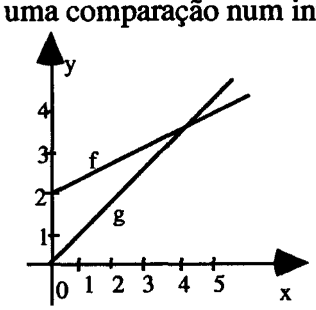


Fig. 8.17 - Gráfico da questão 4 da ficha IV

Esta questão tinha como objectivo, não só observar como é que os alunos comparavam declives de rectas, mas também verificar se confundiam valor da função num dado intervalo com o declive da recta representativa dessa função, nesse intervalo.

No nosso estudo, através das respostas dadas à questão 4 da ficha IV (figura 8.17) nenhum dos alunos fez esse tipo de confusão.

Vejamos algumas das respostas dadas pelos alunos a esta questão.

O Luís Carlos, respondeu que a função **g** crescia mais rapidamente que a função **f** porque, nesse intervalo, o declive de **g** era superior ao de **f**. O Filipe falou em derivada mas, neste caso, com o mesmo significado de declive, uma vez que se tratava de uma recta. Os restantes alunos deram justificações idênticas à justificação dada pelo Luís Carlos.

Filipe: Qual é a mais crescente?

L. Carlos: A gente sabe que é a g. Porque o declive é maior.

Filipe: A derivada de g é que é maior.

O Zé afirmou que a função **g** crescia mais rapidamente no intervalo "porque o ângulo que faz com o eixo dos xx é maior". O Luís Filipe disse que era a função **g** porque o declive da recta que a representava era maior que o declive da recta que representava a função **f**.

Em resumo: Embora algumas investigações sublinhem que muitos alunos confundem declive e altura, nenhum dos alunos participantes no nosso estudo manifestou essa concepção errónea. De sublinhar que, quando os alunos desenvolveram esta actividade, o conceito de declive de uma recta, por observação gráfica, tinha sido amplamente explorado.

8.1.3. Recta tangente como limite das rectas secantes

No estudo levado a cabo por Orton (1983), era dado um ponto fixo P sobre uma circunferência e rectas secantes PQ com várias direcções, de acordo com a figura (figura 8.18). Perguntava-se o que é que acontecia às secantes quando o ponto Q se aproximava do ponto P.

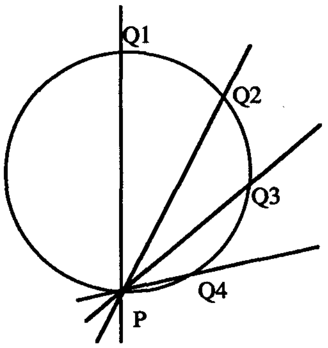


Fig. 8.18 - Gráfico da investigação de Orton (1983, p. 245).

Orton concluiu que esta questão deu origem a muitas respostas insatisfatórias. Cerca de metade dos alunos (quarenta e três) foram incapazes de dizer que a secante se transformava numa recta tangente, apesar do considerável encorajamento, através de questionamentos suplementares. Segundo Orton, respostas tipicamente insatisfatórias incluíram: "a linha torna-se mais pequena", "torna-se um ponto", "a área fica mais pequena", "desaparece". Orton sublinhou que na abordagem da diferenciação, os alunos precisavam de uma ajuda na compreensão da recta tangente como o limite das rectas secantes.

As respostas dadas pelos alunos da investigação de Orton são semelhantes às apresentadas pelos alunos que participaram na nossa investigação.

Na questão 3 da ficha V em que se perguntava o que acontecia às secantes PQ quando o ponto Q_n se aproximava de P (figura 8.19), nenhum dos alunos investigados conseguiu responder, sem ajuda, à questão. Respostas típicas incluíram: "a linha torna-se mais pequena"; "torna-se um ponto"; "a área torna-se mais pequena e desaparece"; "diminui o declive"; "torna-se zero".

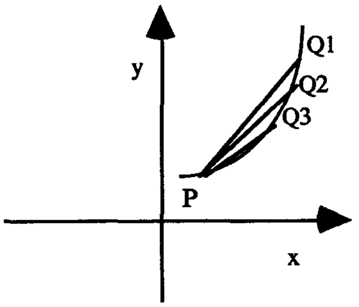


Fig. 8.19 - Gráfico da questão 3 da ficha V.

Algumas destas respostas podem ter resultado da interpretação que os alunos fizeram da figura. As secantes pareciam segmentos de recta. O esquema podia ter originado as respostas "a linha torna-se mais pequena", "torna-se um ponto", "a área torna-se mais pequena e desaparece". O facto de o ponto fixo (ponto P) parecer coincidir com o vértice de uma parábola pode ter induzido a resposta "torna-se zero".

No entanto, não podemos atribuir as respostas dadas pelos alunos, exclusivamente à figura, uma vez que, perante um novo esquema feito pela investigadora (figura 8.20), os alunos, de uma maneira geral, continuaram a dar o mesmo tipo de respostas, como se pode verificar pela passagem que se segue:

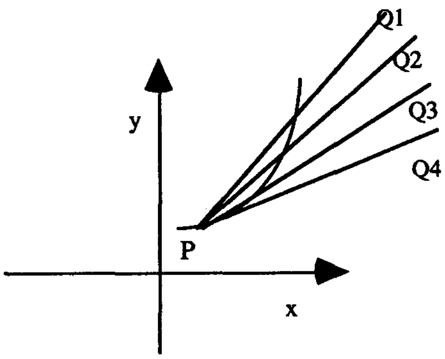


Fig. 8.20 - Gráfico elaborado pela investigadora, para ajudar os alunos a responder à questão 3 da ficha V.

Paulo: Professora, veja lá o que devemos responder na questão 3.

Inv: Então repare o que acontece às várias secantes. Tem várias rectas secantes... quando o ponto Q_n se vai aproximando do ponto P...

Crist: Diminuem.

Paulo: Fica um ponto.

Inv: O que é que acontece às secantes? [Traça, de novo, as rectas secantes].

Paulo: Transformam-se num ponto, no próprio ponto.

Inv: Não esqueça que as secantes são rectas.

Depois de uma ajuda da investigadora surgiram respostas aceitáveis.

Paulo: Então transformam-se numa tangente.

Em resumo: Tal como aconteceu na investigação de Orton, também os alunos envolvidos nesta experiência de ensino manifestaram algumas dificuldades em visualizar a recta tangente à curva num ponto como o limite das rectas secantes. É difícil explicar esta dificuldade manifestada pelos alunos uma vez que, durante a experiência de ensino, fez-se constantemente uma interpretação geométrica do conceito de derivada de uma função num ponto. Queremos, no entanto, sublinhar que os alunos tiveram algumas dificuldades em traçar eles próprios rectas secantes aproximando-se da tangente. Quando os alunos determinavam, graficamente, a derivada de uma função num ponto, traçavam, à partida, uma recta tangente à curva no ponto e determinavam o seu declive.

8.1.4. Relação entre as aproximações pelas secantes num intervalo e a derivada num ponto

O conceito de derivada de uma função num ponto é um dos conceitos mais difíceis de dominar devido às várias sub-noções, de alguma complexidade, que lhe estão associadas.

Um dos objectivos deste estudo era perceber como é que os alunos interpretavam, geometricamente, o conceito de derivada de uma função num ponto. A questão 6 do último teste de avaliação de ambas as turmas envolvidas neste estudo estava directamente ligada a este objectivo. Estas questões foram adaptadas da investigação de Scher, 1993.

No teste da Turma 5, a questão era a seguinte:

6. Observe o gráfico da função f (figura 8.21)

Sendo

$$a = \frac{f(1) - f(0.97)}{0.03}, \; b = f'(1), \; c = \frac{f(1.03) - f(1)}{0.03}$$

Qual dos números **a**, **b** ou **c** é o maior? Justifica.

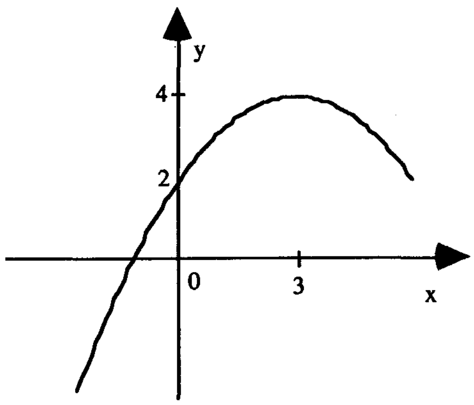


Fig. 8.21 - Gráfico da questão 6 do teste de avaliação de 3/6/95, da turma T5.

No estudo de Scher, esta questão originou algumas respostas muito bem justificadas. Por exemplo:

> O declive desse gráfico está basicamente aproximando-se de zero. Cada valor é basicamente o declive no intervalo [1,97; 2]; [2, 2] e [2,03; 2]. Como o declive decresce à medida que se vai para a direita, o valor mais alto do declive é o que está mais à esquerda.

A resposta do Filipe tem algumas semelhanças com esta resposta. Escreveu o Filipe: "O número maior é o **a** porque sendo a = f' (1^-), b = f' (1) e c = f' (1^+) e f é crescente até 3 (Máximo) logo a derivada é positiva até 3, onde tem um zero. A derivada vai ser decrescente até 3, logo f' (1^-) > f' (1) > f' (1^+), ou seja a > b > c, **a** é o maior".

A resposta do Filipe, mostrou que este aluno sabia comparar correctamente declives, que relacionava, correctamente, a monotonia de uma função com o sinal da derivada. Contudo, parece ter identificado derivada com razão incremental quando afirmou que a = f' (1^-) e que c = f' (1^+), ou seja considerou que **a** e **c** representavam respectivamente a derivada lateral esquerda e a derivada lateral direita da função no ponto x = 1. A justificação dada pelo Filipe mostra que a visualização de relações matemáticas desempenha um papel importante no seu pensamento matemático. Este aluno construiu os conceitos fundamentais da Análise.

A justificação do Luís Carlos não foi muito clara mas mostrou que possui uma noção adequada da variação na variação. Afirmou o Luís Carlos:" O **a**, pois a derivada está a decrescer de valor, pois a concavidade está a ficar menos acentuada, logo é o **a**. É a inclinação entre os dois pontos menores, **a** é o maior".

Posteriormente, em conversa informal com a investigadora, este aluno explicou o seu raciocínio.

> Inv: Como é que respondeu à questão 6 do teste?
>
> L. Carlos: Eu respondi certo e penso que a minha sorte foi precisamente ter-me lembrado da visualização das rectas secantes e tangentes, no computador. Sabe como é que eu justifiquei? Eu não reparei... Primeiro, se uma pessoa estivesse com atenção e percebesse que aquelas fórmulas que a *stora* pôs, aqueles números todos... f (...) menos f(...) a dividir pela distância. Se se olhasse para isso e se se percebesse que aquilo era a fórmula da derivada num ponto, e se se lembrasse que isto aqui...
>
> Inv: Cuidado, não era a definição de derivada de uma função num ponto... aquilo não era nenhum limite...
>
> L. Carlos: Sim, sim. Mas aquilo podia considerar-se uma taxa de variação. Era uma taxa de variação, não era? Neste caso, podemos dizer que se eu for calcular isto para um ponto, estou a calcular o declive da recta. Se considerar um ponto apenas, estou a calcular o declive que ela está a fazer, naquele ponto, ou seja uma tangente àquela curva, não é?

Inv: Então está a considerar o limite da razão incremental, ou seja, está a considerar o x a ser muito próximo de x_0, não é?

L. Carlos: E quem tivesse olhado para o gráfico de uma parábola, assim deste género, um ponto aqui **a** e um ponto aqui **c**, a gente sabia que a inclinação dessa recta tangente ia a diminuir, até chegar a este ponto aqui [aponta o vértice da parábola] onde será zero o declive da recta tangente.

De sublinhar a importância que o Luís Carlos atribuíu ao papel da visualização das rectas secantes e tangentes proporcionadas pelo computador. O aluno mostrou ter uma noção adequada de taxa de variação. Fez uma interpretação visual das estruturas matemáticas envolvidas. O Luís Carlos era um aluno com um forte pensamento visual. Estimulado por um ensino das representações gráficas, formou e utilizou imagens adequadas dos conceitos.

No teste da Turma 3 a questão era a seguinte:

6. Observe o gráfico da função f (figura 8.22)

Sendo

$$a = \frac{f(1) - f(0.97)}{0.03}, \; b=f'(1), \; c = \frac{f(1.03) - f(1)}{0.03}$$

Qual dos números **a**, **b** ou **c** é o maior? Justifica.

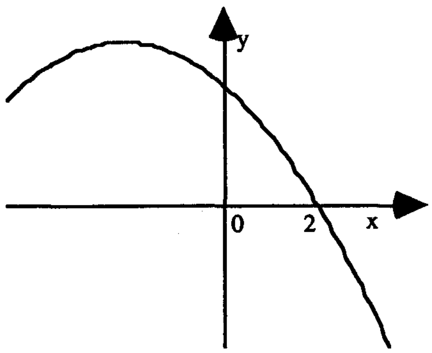


Fig. 8.22 - Gráfico da questão 6 do teste de avaliação de 7/6/95, da turma T3.

A Cristiana, não conseguiu interpretar devidamente cada uma das expressões. Esta aluna parece não ter interiorizado informação relevante que diz respeito ao estudo gráfico da derivada de uma função num ponto. Respondeu apenas: "O maior número é o **b** pois o **a** e o **c** têm valores iguais".

Também no estudo de Scher, alguns alunos assumiram que **a** e **c** tinham o mesmo valor e que eram iguais a 1. Um aluno escreveu no papel 2,03 - 2 = 0,03. De acordo com Scher, isto sugere que esse aluno tem problemas com a notação funcional e atribuiu um valor a f(2,03) igual a 2,03 e f(2) igual a 2. A Cristiana pode ter feito um raciocínio semelhante. Scher acrescentou que estas leituras incorrectas de notação sugerem que a notação analítica que usamos na Análise para representar funções e as suas derivadas podem ser problemáticas.

O Luís Filipe e o Zé confundiram razão incremental com limite dessa mesma razão. Afirmaram que os três números eram iguais uma vez que todos significavam o mesmo — tratava-se de expressões da derivada de **f** no ponto $x = 1$.

Também alguns dos alunos da investigação de Scher responderam que os três valores eram iguais. Segundo Scher, estes alunos podem ter uma concepção de que o declive das secantes não se aproxima do declive da tangente, mas que é igual a esse declive.

O Paulo sentiu necessidade de atribuir valores e efectuar cálculos para concluir que o número maior era o **a**. Escreveu este aluno:
"$a = \dfrac{f(1) - f(0.97)}{1 - 0.97}$, $c = \dfrac{f(1.03) - f(1)}{1.03 - 1}$. Então $a = \dfrac{2.4 - 2.5}{0.03}$, $b \approx -1$ e $c = \dfrac{-0,4}{0.03}$. É o **a**".

As respostas dadas pelos seis alunos a esta questão, analisadas à luz das estratégias privilegiadas ao longo da intervenção didáctica e já descritas pormenorizadamente nos capítulos anteriores, vêm reforçar algumas das características destes alunos. Assim, o Filipe e o Luís Carlos continuaram a evidenciar que os gráficos desempenhavam um papel principal na resolução deste tipo de questões. O Paulo, como era sua característica, deve ter concluído intuitivamente qual a resposta correcta. Possivelmente, perante a dificuldade de explicar a sua opção, arriscou a substituição de valores da função nos pontos considerados, adequados à situação. Também para o Paulo, o gráfico desempenhou o local privilegiado da resolução da questão. O Luís Filipe e o Zé, embora não tenham sido bem sucedidos na resposta dada, na sua justificação mostraram não se ter limitado a observar fórmulas. Associaram as três expressões à derivada da função no ponto $x = 1$. Não tiveram atenção ao facto de duas delas se referirem a uma razão incremental em vez do limite dessa razão. A Cristiana, a aluna que privilegiou, ao longo desta experiência de ensino, estratégias analíticas de resolução das questões, continuou a mostrar a sua concepção de uma matemática de fórmulas e regras. Na sua resposta, não há o menor indício de ter feito qualquer conexão entre as expressões e o gráfico. A Cristiana parece ter limitado a sua atenção a fórmulas estáticas. A resposta dada por esta aluna sugere alguma dificuldade na ligação de uma representação simbólica geral $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, com expressões simbólicas particulares.

Muitas das respostas dadas por estes alunos são semelhantes às obtidas na investigação de Scher.

Em resumo: Alguns alunos não fizeram uma conexão adequada entre a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto e o limite de uma razão incremental. Por vezes, não distinguiram razão incremental do limite dessa razão. De sublinhar que durante a intervenção didáctica os alunos nunca determinaram a derivada de uma função num ponto através do limite da razão incremental.

8.2. Desempenho dos alunos nos testes de avaliação

Os dois últimos testes de avaliação, realizados em ambas as turmas no 3º período, não foram concebidos com o fim exclusivo da avaliação da intervenção didáctica. Enquadraram-se no sistema de avaliação normal dos alunos. No entanto, nesses testes foram introduzidas algumas questões que apelavam a uma interpretação gráfica, na linha do trabalho desenvolvido durante a intervenção didáctica. Nesta secção faz-se uma descrição das respostas dadas pelos alunos a essas questões. Não foram observados os processos de resolução, pelo que, serão apenas discutidos os produtos apresentados pelos alunos.

A forma como os alunos participantes na intervenção didáctica responderam a estas questões reflecte uma certa confiança na interpretação de gráficos e revela que alguns deles construíram um conceito geométrico de derivada de uma função num ponto.

8.2.1. Relação entre os gráficos da função e da função derivada

A questão 4 do último teste de avaliação, tinha como objectivo verificar se os alunos conseguiam relacionar o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada.

No teste da Turma 5, a questão era a seguinte:

4. Seja f uma função cujo gráfico se encontra esboçado na figura 8.23.

4.1. Qual dos gráficos seguintes (figura 8.24) pode ser o de f' ? Justifica a resposta.

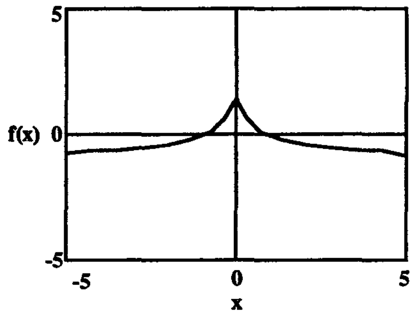


Fig. 8.23 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 3/6/95, da turma T5.

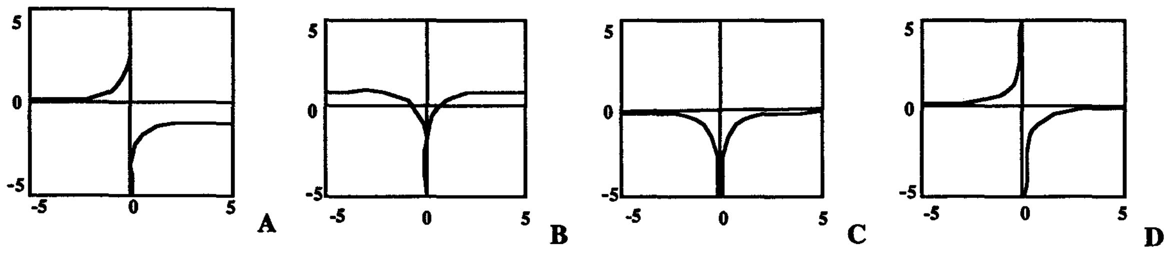


Fig. 8.24 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 3/6/95, da turma T5.

O Filipe, evidenciando uma grande facilidade em identificar, por simples observação gráfica, funções pares e funções ímpares, escreveu: "Como f é uma função par (por observação do gráfico) implica que f' é ímpar, logo o gráfico é o **D**". Este aluno revelou uma grande capacidade de interpretar informação gráfica e de estabelecer as conexões adequadas para responder à questão.

O Luís Carlos, mostrando a sua preferência pelo relacionamento da monotonia da função com o sinal da derivada, fez a sua selecção do seguinte modo: "Como a função f(x) é crescente em]-5, 0[e decrescente de]0, 5[, logo os gráficos **B** e **C** não podem ser. Como f(x) decresce para um valor sem chegar lá, quer dizer que a sua derivada quando f(x) tende para esse valor, vai estar a tender para zero. Portanto o gráfico é o **D**".

O Luís Carlos utiliza uma linguagem informal e intuitiva mas com um significado que só pode ser consequência dos conhecimentos matemáticos envolvidos "como f(x) decresce para um valor sem chegar lá [noção intuitiva de limite], quer dizer que a sua derivada quando f(x) tende para esse valor, vai estar a tender para zero".

A questão do teste realizado em 7/6/95, pelos alunos da Turma 3, era a seguinte:

Seja f uma função cujo gráfico se encontra esboçado na figura 8.25.

4.1. Qual dos gráficos seguintes (figura 8.26) pode ser o de f' ? Justifica a resposta.

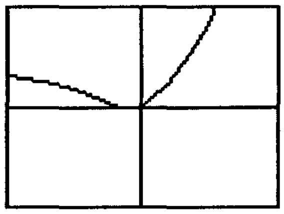


Fig. 8.25 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 7/6/95, da turma T3.

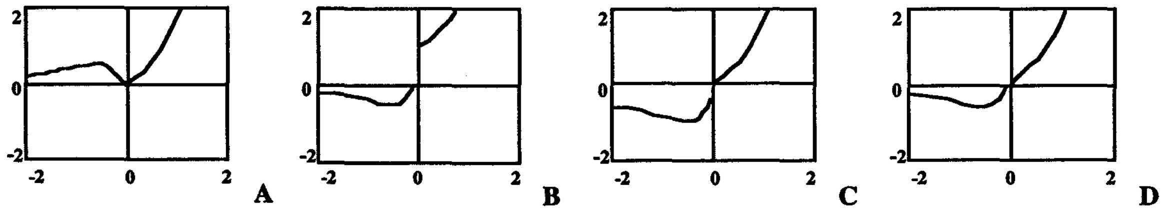


Fig. 8.26 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 7/6/95, da turma T3.

O Luís Filipe excluiu o gráfico **A**, apelando à relação entre a monotonia da função e o sinal da sua função derivada. Para continuar a selecção, determinou, por observação gráfica, as derivadas laterais no ponto de abcissa 0 (ponto crítico da função). Afirmou: "O gráfico **A** não pode ser pois é sempre positivo, e como a função é decrescente e depois crescente está excluído. O gráfico **C** não é pois a derivada à esquerda de zero é zero (por observação gráfica). O gráfico **D** também não é pois a derivada à direita de zero é aproximadamente um (por observação gráfica). O único gráfico que pode ser o gráfico da derivada é o gráfico **B**".

O Paulo seguiu um raciocínio semelhante ao do Luís Filipe. Como já sublinhámos, este aluno apelava à sua intuição para dar uma primeira resposta. Em seguida, tentava justificar, aquilo que, de início lhe parecia intuitivo. Disse o Paulo: "É o gráfico **B**. De -2 a 0 a função é decrescente sendo assim a derivada negativa, de 0 a 2 a função é crescente logo a derivada é positiva. No ponto zero a derivada à esquerda é zero e à direita de zero a derivada é 1, sendo assim em zero não existe derivada. Por estas razões só pode ser o gráfico **B**".

O Zé não respondeu correctamente a esta questão. Relacionou bem a monotonia da função com o sinal da sua função derivada, para excluir o gráfico **A**. Escolheu o gráfico **D**. O Zé parece ter seleccionado este gráfico, por se tratar de um gráfico contínuo no ponto de abcissa 0, tal como acontecia com a gráfico da função. Este aluno manifestou várias vezes uma concepção de que o gráfico da função derivada de uma função contínua deveria ser contínuo. Afirmou o Zé: "f(x) é decrescente de]-2, 0[logo f' (x) é negativa. f(x) é crescente de]0, 2[logo f'(x) é positiva. Então só pode ser **B**, **C** ou **D**. $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$ logo só pode ser o **D**".

A Cristiana respondeu correctamente à questão. Contudo, na sua justificação, faz algumas afirmações que evidenciaram a dificuldade que esta aluna manifestou, ao longo desta experiência de ensino, na determinação, a partir de observação gráfica, da derivada das funções em determinados pontos críticos. A Cristiana revelou uma certa confusão com a noção de continuidade de uma função num ponto. Afirmou a Cristiana: "O gráfico é o **B** porque f(x) não é contínua no ponto x = 0 pois o limite à direita e à esquerda têm valores diferentes. No intervalo]-2, 0[a função decresce, o que implica que f'(x) seja negativa. No intervalo]0, 2[a função cresce, o que implica que f' (x) seja positiva. No ponto x = 0, a derivada à direita toma o valor $+\infty$ e a derivada à esquerda toma o valor zero. Portanto não existe derivada neste ponto".

De sublinhar, uma vez mais, a facilidade com que os alunos interpretaram informação gráfica e estabeleceram conexões adequadas à situação. O Luís Carlos continuou fiel à sua estratégia de começar por relacionar a monotonia da função com o sinal da derivada. Em seguida, utilizou uma linguagem recheada de significado matemático mas muito intuitiva e cheia de movimento "decresce para um valor sem chegar lá" para uma opção final. O Luís Filipe referiu várias vezes na sua justificação "por observação gráfica". Depois de ter feito uma primeira selecção relacionando a monotonia da função com o sinal da função derivada, recorreu à derivada da função num ponto crítico e mostrou facilidade em determinar a declive das semi-tangentes à curva representativa da função nesse ponto. O Paulo mostrou muita intuição na sua resposta. A incorrecção da resposta dada pelo Zé parece poder atribuir-se a uma concepção manifestada por este aluno de que o gráfico da derivada de uma função contínua deveria ser contínuo, ou ao facto deste aluno ter associado o ponto de abcissa zero ao vértice de uma parábola. A Cristiana respondeu correctamente à questão e relacionou bem, a partir do gráfico, monotonia da função com sinal da função derivada. Contudo, mostrou dificuldade em pensar em semi-rectas tangentes à curva da função no seu ponto crítico.

Passar do gráfico da função derivada para o gráfico de uma das funções primitivas, é uma actividade com que os alunos se vêem raramente confrontados. Tarefas mais comuns são aquelas em que, dado o gráfico de uma função, se pede o gráfico da sua função derivada.

Uma das alíneas do penúltimo teste de avaliação, pretendia verificar se os alunos conseguiam, a partir do gráfico da função derivada, indicar um gráfico plausível para essa função.

No teste da Turma 5, a questão era a seguinte:

4. O gráfico da figura 8.27 é a representação gráfica da função derivada f' de uma função f no intervalo [-5, 5].

4.3. Quais dos seguintes gráficos (figura 8.28) podem ser o da função f? Justifica a resposta.

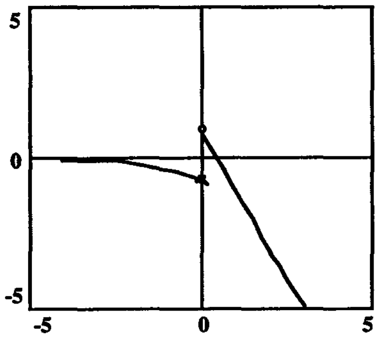


Fig. 8.27 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 11/5/95, da turma T5.

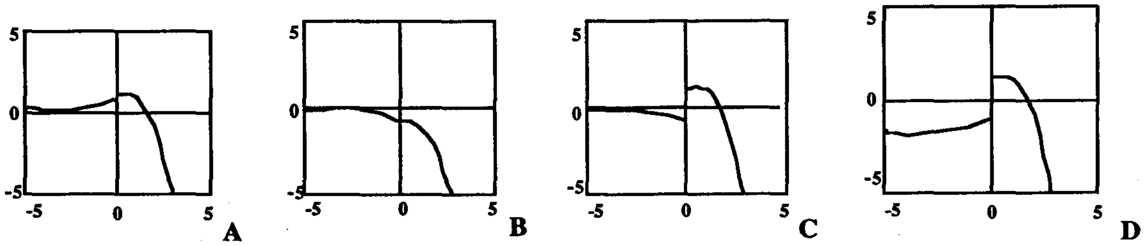


Fig. 8.28 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 11/5/95, da turma T5.

O Filipe seleccionou apenas o gráfico C, com a seguinte justificação: "Tem um máximo relativo em 1, é decrescente até x = 0, é crescente de]0, 1[e decrescente de]1, +∞[devido às suas derivadas".

A justificação dada pelo Filipe para seleccionar o gráfico C adaptava-se perfeitamente ao gráfico B. O aluno pode não ter reparado na questão "**Quais dos** gráficos ". Além disso, de uma maneira geral, este tipo de questões aponta para uma única solução. Outra hipótese a não desprezar é a concepção de que o gráfico da função deveria ser descontínuo em x = 0 uma vez que, o gráfico da sua função derivada também era descontínuo nesse ponto.

O Luís Carlos respondeu que era o gráfico C, sem dar qualquer justificação.

A questão correspondente do teste da Turma 3, era a seguinte:

4. O gráfico da figura 8.29 é a representação gráfica da função derivada f' de uma função f no intervalo [-4, 4].

4.2. Quais dos seguintes gráficos (figura 8.30) podem ser o da função f? Justifica a resposta.

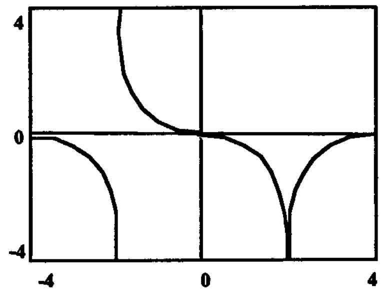


Fig. 8.29 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 17/5/95, da turma T3.

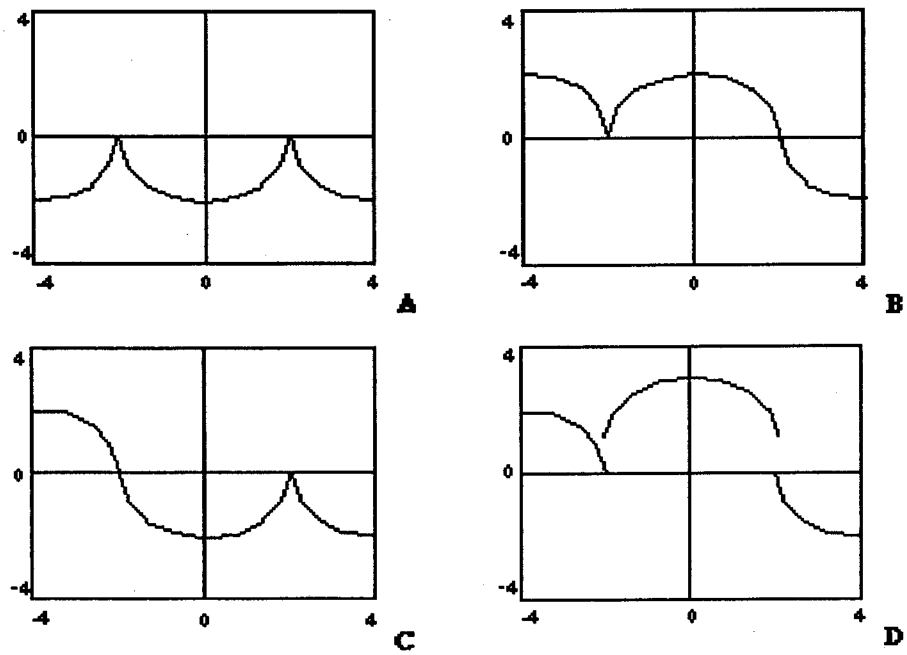


Fig. 8.30 - Gráfico da questão 4 do teste de avaliação de 17/5/95, da turma T3.

A Cristiana respondeu que o único gráfico que podia ser o gráfico de **f** era o gráfico **D,** o que nos pode levar a pensar que esta aluna tinha uma concepção de que o gráfico da função derivada de uma função contínua deveria ser contínuo. Além disso, esta aluna, na resolução de uma actividade em que era dada a expressão analítica da função derivada e se pedia o estudo da monotonia de uma função correspondente, considerou que havia apenas uma função com essa função derivada. Um raciocínio análogo pode ter sido seguido, por esta aluna, perante a questão do teste de avaliação.

Os outros três alunos responderam que os gráficos **B** e **D** podiam representar o gráfico da função **f**. Recorreram à relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função para fazer essa selecção. O Paulo acrescentou: "Quanto aos pontos -2 e 2 as derivadas dos gráficos **D** e **B** são os mesmos pois no gráfico **B** a derivada à esquerda de -2 é $-\infty$ e à direita é $+\infty$". Este aluno conseguiu, por observação gráfica, determinar as derivadas laterais das funções em pontos de descontinuidade.

Em relação a esta questão, de sublinhar o facto de três alunos terem seleccionado apenas um gráfico como resposta possível. Esta concepção pode ser consequência dos alunos estarem mais habituados a resolver questões em que dado o gráfico da função se pede o gráfico da função derivada (que é único). Ficam-nos algumas dúvidas se algum destes alunos continuou a exigir a continuidade da função derivada de uma função contínua. Os três alunos que responderam correctamente à questão continuaram a relacionar a monotonia da função com o sinal da derivada e a determinaram a derivada em pontos críticos. O Paulo, um aluno que ao longo da intervenção didáctica manifestou alguma relutância em falar de derivadas infinitas, pareceu ter ultrapassado essa concepção e determinou bem essas derivadas a partir do gráfico.

Em resumo: Através das respostas dadas pelos alunos a questões dos dois últimos testes de avaliação podemos afirmar que a experiência de ensino foi bem sucedida. Os alunos revelaram ter construído os conceitos fundamentais ligados ao estudo das derivadas: compararam bem declives, demonstraram uma noção adequada de taxa de variação e de variação na variação, relacionaram correctamente monotonia de uma função com sinal da derivada, relacionaram bem o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada.

Os alunos que privilegiaram estratégias geométricas de resolução das questões mostraram que a visualização de relações matemáticas era uma componente importante do seu pensamento — revelaram capacidade de interpretar informação gráfica. A linguagem informal e intuitiva mas com significado matemático que os alunos utilizaram, permite-nos afirmar que estes alunos dominavam os conhecimentos matemáticos envolvidos no estudo das derivadas.

8.3. Opinião dos alunos

No final deste estudo que coincidiu também com o final do ano lectivo, foi entregue aos alunos das duas turmas um inquérito para recolher as suas opiniões acerca da intervenção.

O inquérito tinha duas versões (versão A e versão B (Anexo 3)), a primeira para ser respondida pelos alunos que tinham participado nas aulas extra-lectivas com computadores, com o objectivo de obter as suas opiniões acerca da experiência, a versão B para ser respondida pelos restantes alunos das turmas, com o principal objectivo de perceber a razão porque não tinham participado nessas actividades.

Responderam à versão A do inquérito dezassete alunos, o que corresponde a uma taxa de retorno de 100%. Embora os inquéritos fossem anónimos, dois dos alunos participantes na intervenção, O Filipe e a Cristiana, assinaram a folha, pelo que, durante a breve análise que fazemos desses inquéritos, são identificadas algumas das respostas dadas por estes alunos.

Responderam à versão B do inquérito apenas 23% dos alunos, uma taxa inferior à desejada. De sublinhar que a maior parte dos alunos, na última semana de aulas manifestava alguns sinais de cansaço e uma certa ansiedade pelo facto de se aproximar a data da Prova de Aferição, o que poderá ter contribuído para esta baixa taxa de retorno.

8.3.1. Alunos que frequentaram as aulas extra-lectivas

Dos dezassete alunos que frequentaram as aulas extra com recurso a ferramentas computacionais, oito deles costumavam trabalhar com computador fora da escola.

A maior parte desses alunos utilizava, principalmente, o programa *Word for Windows*, para efectuar trabalhos escolares. Utilizavam ainda programas de gráficos e programas de desenho.

Nos anos lectivos anteriores, onze desses alunos tinham desenvolvido actividades na escola em contexto computacional, embora apenas cinco o tenham feito no âmbito curricular (em aulas de Matemática, de Físico-Química, de Mecânica e de Electrónica). Os restantes alunos tinham utilizado o computador na escola para desenvolver actividades promovidas pelo Centro Escolar Minerva, nomeadamente em programação de linguagem LOGO e na paginação do Jornal de Escola.

O Filipe era um dos alunos que trabalhava em casa com o computador. Utilizava o programa *Excel* e o programa que utilizámos para efectuar este estudo. Este aluno já tinha trabalhado, na escola, em anos anteriores, no desenvolvimento de actividades em contexto computacional, no âmbito de projectos promovidos pelo Centro Escolar Minerva.

A Cristiana nunca tinha trabalhado com computadores.

Em relação às dificuldades sentidas no trabalho com ferramentas computacionais, os alunos assinalaram: "Não saber mexer no computador"; "falta de prática ou seja não estar habituado a trabalhar com computadores"; "saber quais as instruções que se devem escrever no computador"; "falta de hábito"; "processo de introdução dos dados no computador"; "algumas dúvidas sobre o próprio programa". Quatro alunos, entre os quais o Filipe (que pertenciam ao grupo dos alunos que, em anos anteriores, tinham trabalhado na escola com ferramentas computacionais) afirmaram não terem sentido qualquer tipo de dificuldade em trabalhar com o computador.

A Cristiana assinalou como principal dificuldade o facto de "não saber quais as instruções que se devem escrever no computador".

Todos os alunos valorizaram fortemente, as vantagens do recurso a ferramentas computacionais e sublinharam a sua importância na visualização gráfica: "Ajuda muito no estudo duma função, pois podemos visualizar o seu gráfico"; "aprender a ver as derivadas, a observar o gráfico de funções"; "ver os gráficos"; "facilidade de compreensão dos gráficos"; "o alcance visual daquilo que é uma função só pode ser obtido instantaneamente com um computador, por isso creio que é uma iniciativa de grande valor para os alunos que, como eu, tinham dúvidas nas funções"; "existem sempre muitas vantagens em conseguirmos visualizar aquilo que fazemos na prática. É muito mais fácil resolver um exercício de gráficos se nos lembrarmos daquilo que vimos e das conclusões que tiramos no computador"; "melhor visualização das funções no que respeita aos gráficos"; "melhor compreensão do comportamento das funções"; "maior rapidez na visualização de gráficos, maior exactidão nas operações"; "observação mais rápida dos valores das derivadas"; "o trabalho com o computador levou-nos a perceber e a visualizar melhor as funções e o seu funcionamento"; "vantagem no estudo das derivadas nos gráficos. O computador permite uma visualização de como se faz algo e da sua evolução"; "consegui perceber as funções reais de variável real"; "rapidez e precisão nos resultados. Fácil interpretação das funções".

Todos os alunos envolvidos neste estudo desenvolveram as actividades propostas com entusiasmo tendo, alguns deles, sublinhado a importância de uma metodologia de ensino diferente que também "ajuda a aprender a teoria". Como se pode ver pelas respostas dadas à questão *Interesse/Desinteresse no desenvolvimento das actividades*, nenhum dos alunos evidenciou na sua resposta desinteresse no desenvolvimento das tarefas. Afirmaram: "Interesse em entender melhor as matérias abordadas"; "bastante interessantes"; "despertou-me muito interesse porque não há melhor para uma cabeça confusa como um bom desenho"; "com interesse, pois é uma forma de ensino diferente do habitual"; "depende dos dias e das fichas, mas foi com algum interesse"; "gostei bastante, até porque gosto de computadores"; "teve interesse porque fez aprender a teoria".

Dois alunos afirmaram terem sentido um certo cansaço, no final do estudo. Um desses alunos foi o Filipe que argumentou: "interessante, mas com a continuação tornou-se, por vezes, cansativo".

No que se refere à diferença sentida pelos alunos na construção de conceitos matemáticos, apenas um aluno revelou não ter notado grande diferença na construção desses conceitos. Afirmou: "Não senti grande diferença". Este aluno vivia, no momento da resposta ao inquérito, a grande preocupação da sua passagem ou reprovação na disciplina de Matemática.

Em relação a esta questão, os alunos continuaram a dar ênfase à visualização gráfica e ao aprofundamento do estudo das funções e das derivadas: "Sim, nas derivadas e na visualização gráfica"; "aprofundamento relativamente aos gráficos"; "ajuda no que se refere aos gráficos, matéria em que tinha algumas dificuldades (por falta de visualização)"; "consegui perceber como é que aquilo funciona"; "aprofundamento no estudo das funções"; "bastantes, principalmente nas derivadas e nos gráficos"; "ajudou muito principalmente na interpretação dos gráficos de funções e nas derivadas"; "senti que a minha capacidade de analisar funções nos seus diversos aspectos melhorou substancialmente"; "sim, no estudo das derivadas e nas sucessões"; " no estudo das derivadas e das funções".

Todos os alunos afirmaram que o trabalho desenvolvido nestas aulas os tinha ajudado na sala de aula habitual de Matemática. Sublinharam, uma vez mais, a importância da visualização, observação e interpretação dos gráficos de funções; a visualização das tangentes às curvas das funções; uma maior participação nas aulas; uma maior compreensão dos conceitos básicos envolvidos.

Em relação ao trabalho em pequeno grupo, todos os alunos consideraram que tinha sido uma metodologia que os tinha ajudado. Mesmo o aluno que afirmou não gostar, normalmente, de trabalhar em grupo, referiu: "Eu não gosto de trabalhar em grupo, mas nos computadores gostei, principalmente porque tinha apenas que trabalhar com mais um colega".

Um dos alunos, embora não negando as vantagens do trabalho em grupo, argumentou: "Sim. O trabalho e o estudo em grupo é bom mas julgo que devemos continuar a ter momentos sózinhos, pois as dificuldades que aparecem são, por vezes, diferentes das que surgem quando estamos em grupo".

Nesta metodologia de trabalho, os alunos deram grande importância à possibilidade de aprofundar certas matérias; à possibilidade de confrontar e debater ideias; à ajuda mútua; à motivação para desenvolver as actividades; ao aprofundamento de certas matérias; à necessidade de dar algumas explicações ao colega de grupo; à maior facilidade de concentração; ao modo como uns alunos puxam pelos outros, proporcionando uma aprendizagem mais activa.

O Filipe afirmou: "Tiram-se dúvidas um ao outro o que ajuda à apreensão da matéria". A Cristiana apresentou uma argumentação semelhante: "Ao confrontar a minha opinião com a do meu colega, trocamos ideias e aprendemos mais coisas".

Na questão 4 afirmava-se: *Estas aulas exigiram-te um esforço suplementar num momento em que a preparação para as Provas de Aferição e Específica poderiam estar no centro das preocupações*. Pedia-se um comentário a esta afirmação.

Todos os alunos, embora verbalizando a sua ideia de diversas formas, afirmaram que estas aulas não tinham exigido esforço suplementar porque serviram de preparação para essas Provas. Argumentaram ainda que, o facto de terem sentido que estas aulas os tinha ajudado a compreender melhor certos conceitos, se iria, certamente, reflectir nos seus desempenhos perante essas Provas, sobretudo no que dizia respeito à interpretação de gráficos. Disseram os alunos: "Acho que é um esforço com um peso pouco significativo, pois a preparação para essas provas deve ser um estudo contínuo"; "julgo que não, mas se existiu algum esforço suplementar espero vir a ser recompensado ao ver as notas da Aferição e Específica de Matemática"; "estas aulas são, para mim, uma preparação para a Aferição e Específica"; "não, porque ajudava. Acabavam por ser aulas complementares"; "estas aulas não foram perda de tempo, mesmo no ponto de vista do estudo para essas provas, foram úteis para o estudo da matéria"; "não me prejudicou em nada. Apenas me ajudou a compreender melhor certas coisas e até nos ajuda a estudar mais uma horinha"; "não exigiram esforço suplementar. Pelo contrário, contribuiram para a preparação dessas provas"; "não acho que uma ou duas horas por semana dê prejuízo às outras disciplinas, acho que é uma necessidade"; "espero ter resultado nessas provas, na parte da escolha múltipla dos gráficos"; "não. Serviu de preparação"; "vieram ajudar nessa preparação, e não roubaram tempo"; "ajudaram na preparação para a Específica, pois esta também tem gráficos"; "acho bem que se continuem a fazer este tipo de trabalhos extra, pois preocupação não nos leva a lado nenhum se não trabalharmos, e como todo o tempo é pouco...!"; "acho que não foi um esforço, mas sim o contrário porque tudo aquilo que conseguimos desvendar com a ajuda dos computadores poderiam ser pequenas dúvidas que nos levariam horas a resolver, logo o computador acabou por ser uma poupança de tempo".

Em relação ao pedido de sugestões de alterações a efectuar em futuras experiências do mesmo tipo, nove alunos não responderam.

Algumas das propostas de alteração formuladas pelos alunos foram: "Maior número de professores nessas aulas seria ideal, pois as dúvidas são muitas"; "penso que estas experiências se deviam iniciar em anos anteriores ao 12º Ano, pois assim os alunos habituavam-se a trabalhar com computadores mais cedo, e é um incentivo para estudar, brincando com a Matemática"; "acho que devia ser um processo instalado em todos os anos e em todas as turmas para que houvesse uma certa continuidade"; "programas novos mais evoluídos"; "menos fichas, mas com mais concentração da matéria".

8.3.2. Alunos que não frequentaram as aulas extra-lectivas

Dos alunos que não frequentaram as aulas extra-lectivas com ferramentas computacionais, apenas dois costumavam trabalhar com computador fora da escola. Esses alunos utilizavam o computador para jogar e usavam o programa *Word for Windows* para efectuar trabalhos escolares. Nos anos lectivos anteriores, nenhum desses alunos tinha desenvolvido actividades na escola em contexto computacional.

Os alunos justificaram a sua não participação nas aulas extra-lectivas, com recurso a ferramentas computacionais, por falta de tempo, por incompatibilidade de horário e ainda por falta de vontade.

8.3.3. Outras opiniões dos alunos

Alguns dos diálogos travadas entre os alunos e a investigadora ou entre os alunos e a professora evidenciam uma opinião muito favorável dos alunos em relação à intervenção didáctica em geral e, em particular, ao papel desempenhado pela visualização.

Dizia o Bruno no final de uma aula na sala de aula habitual: "Eu tenho tentado sempre trabalhar, desde o princípio do ano. Mas, por exemplo, em relação às derivadas eu não tinha dado nada o ano passado. Nunca tinha ouvido falar disso. Aquelas fichas que fizemos no computador foi o que me orientou neste assunto".

A Cristiana sublinhou o papel desempenhado pela visualização no estudo das funções.

Inv: Qual a vantagem que vocês vêem na utilização do computador?

Crist: Dá para visualizar melhor o gráfico de uma função. Às vezes estamos à espera que aconteça uma coisa e o que acontece é outra. Na aula não temos essa ajuda... Na aula não consigo ver essa história do tender para mais infinito e para menos infinito, como aqui vejo. E depois na aula não temos essa ajuda. Por exemplo, neste caso, tende para $+\infty$ e eu estava à espera que neste ponto a função estivesse a tender para $-\infty$ e afinal deu para $+\infty$. Na aula não consigo visualizar estas situações. Isto em relação ao gráfico da função $y = \frac{1}{x^2}$. Na aula normal não consigo ver bem estas situações. Pelo menos não consigo visualizar.

...

Inv: Não pensam que as aulas são dadas, com computadores para a matéria ser dada mais rapidamente...

Crist: Não. É para percebermos melhor... Às vezes estamos a "decorar" em vez de perceber. Por exemplo, em relação ao declive, eu sabia que na recta $y = 4x+2$, o declive era 4, mas não percebia que quanto maior fosse o número maior era a inclinação, a recta A está mais a "pique".

Paulo: Por vezes estamos apenas a decorar regras...

No início de uma aula, a Cristiana disse que estava muito contente com a nota que tinha tido no teste e que sentia que tinha conseguido resolver as questões relacionadas com os gráficos de funções devido às aulas com recurso ao computador: "o computador tem-me ajudado muito na visualização dos gráficos".

Dizia o Luís Carlos em relação à resposta dada a uma questão de um dos testes de avaliação: "Eu respondi certo e penso que a minha sorte foi precisamente ter-me lembrado da visualização das rectas secantes e tangentes, no computador".

A professora várias vezes referiu o facto de os alunos se mostrarem satisfeitos com o trabalho que estavam a desenvolver na sala de computadores.

> Prof: O Pedro hoje disse-me que achou muita piada... que agora está a gostar muito da Matemática. Mesmo o Luís [Carlos] e o Filipe também me diziam que gostavam agora muito mais de Matemática, que achavam muito engraçado estar a pensar aquelas coisas. O Luís dizia-me: "quando eu não era capaz de pensar... achava que era só decorar coisas... exercícios... tinha que decorar uma quantidade de exercícios... e agora vejo que não é preciso estar a decorar exercícios".

Em resumo: Todos os alunos manifestaram uma opinião favorável em relação à intervenção didáctica. Sublinharam a importância da visualização, observação e interpretação de gráficos de funções e uma melhor compreensão dos conceitos básicos envolvidos. Todos os alunos referiram ter desenvolvido as actividades com interesse e gostaram da metodologia do trabalho em grupo por lhes ter proporcionado o confronto e debate de ideias e uma aprendizagem mais activa.

8.4. Opinião da professora

A professora considou a experiência muito positiva. Em vários diálogos travados com a investigadora, manifestou a sua opinião favorável em relação à intervenção didáctica. Considerou que os alunos tinham aprendido a pensar de uma forma diferente, o que implicava também uma melhoria significativa nos resultados dos testes.

> Prof: Os alunos que vão às aulas dos computadores não são os melhores alunos mas são aquele tipo de alunos que gostam de pensar, gostam de reflectir, gostam de saber as razões, os porquês. Não estão a decorar regras, mas a tentar perceber, a visualizar situações. Os outros alunos acham que as tarefas com recurso ao computador são muito fáceis e então não vêm. Mas o que é verdade é que, muitos deles, sabem fazer cálculos e mais cálculos mas não percebem bem o que estão a fazer e quando lhes

coloco uma questão que os obriga a pensar, eles falham. Se vires bem, este último teste que tinha questões deste tipo, foi um êxito para os alunos como o Filipe e a Cristiana (tiveram as melhores notas da turma). Os testes destes alunos mostram que aquelas cabeças sabem o que estão a fazer. Há alunos da Turma 5 que são bons alunos e que nunca quiseram ir aos computadores. Agora estão a ver-se aflitos com os gráficos e com a sua interpretação.

Considerou ainda que, o facto de os alunos precisarem, muitas vezes, de explicar ao colega de grupo a sua estratégia de resolução, os tinha levado a uma reflexão importante no seu processo de construção do conhecimento.

Prof: A Cristiana conseguiu e penso que se ela conseguir agora boas notas, ela deve muito ao facto de ter estado com outros colegas, a tentar explicar aos outros... e isso ajudou-a imenso. Porque ela começou a arranjar palavras para ver se os outros entendiam e, muitas vezes, a meio, dava-se conta de que ela também não estava a perceber bem ("afinal eu também não estou a perceber..."), não é? Ou seja, ela própria, por vezes, não tinha visto bem as coisas, não é?

Inv: Fazia aquilo como uma rotina...

Prof: Sim, como uma rotina... E ela aprendeu a não fazer as coisas com a rotina. Eu acho que a ela é capaz de lhe ter feito muito bem estas aulas.

...

Prof: O Zé também conseguiu... muito sossegado, mas também conseguiu ver coisas. Ele também aproveitou. Depois, aqueles mais fraquinhos... foi um sarilho... por exemplo, este Henrique. Este Henrique aprendeu imensas coisas aqui na sala dos computadores, num instantinho. Se ele tivesse vindo a todas as aulas, talvez se conseguisse fazer alguma coisa dele. Mas, ele vinha cá de vez em quando... desanimou, desistiu... ele acabava por ter conseguido, porque ele depois disse-me que nas últimas aulas tinha entendido imensa coisa por causa das aulas nos computadores.

A professora apreciou o entusiasmo com que alguns alunos desenvolviam as actividades, mesmo aqueles que ela considerava mais fracos.

Inv: Nota-se que alguns alunos até estão a pensar mais nas questões...

Prof: Sim. Por exemplo a Cristiana melhorou muito com as aulas dos computadores. Ela tinha muita dificuldade em pensar e "ver" o que estava a fazer. Está muito melhor. Os "Henriques", por exemplo, que eram alunos muito fracos também se começaram a entusiasmar a partir do momento em que foram aos computadores. Mesmo eles me disseram que essas aulas os ajudaram muito. Aliás, penso que a tua presença foi proveitosa para os alunos. Por um lado, tinham mais uma pessoa a quem recorrer quando tinham dúvidas, por outro lado, penso que se achavam importantes por estarem a ser observados.

A professora fez uma avaliação global positiva da intervenção, lamentando o facto de nem sempre poder trabalhar com todos os alunos desta forma, por ser difícil desenvolver actividades deste tipo com um elevado número de alunos, apoiados apenas por uma professora.

8.5. Uma forma diferente de aprender e fazer matemática

Um dos objectivos do nosso estudo foi tentar perceber de que modo a aprendizagem das derivadas de funções era influenciada pela exploração de actividades desenvolvidas em contextos computacionais. O computador foi utilizado com o objectivo de tornar a aprendizagem um processo mais activo de construção do conhecimento.

É do conhecimento de todos nós que, para uma aprendizagem efectiva, é fundamental o ambiente no qual o ensino se desenvolve. O computador pode desempenhar um papel significativo ao proporcionar um ambiente em que o aluno pode construir o seu próprio conhecimento matemático através das várias interacções que se geram nesse ambiente, em suma, pode desempenhar um papel importante na compreensão de conceitos.

Podemos afirmar que, ao longo desta intervenção didáctica se criou, na sala de computadores, um poderoso ambiente de aprendizagem. Tiveram influência directa, na criação desse ambiente, o trabalho efectuado em pequeno grupo utilizando o computador, o programa de gráficos utilizado no desenvolvimento da maior parte das actividades propostas, as fichas de trabalho e o apoio dado, quer pela professora da turma, quer pela investigadora.

O ambiente computacional permitiu que os alunos investigassem sobre o tema *derivadas de funções* de uma forma completamente diferente da habitual. Na sua maioria, os alunos conseguiram construir novas dimensões dos conceitos associados a este tema. Desenvolveram estratégias próprias no desenvolvimento das actividades que lhes foram propostas; cultivaram a troca de ideias através do trabalho em grupo; desenvolveram capacidades de reflexão, argumentação e de exposição dos seus raciocínios.

As questões das fichas de actividades, na sua maioria, foram colocadas em termos de privilegiar uma resolução gráfica. Os alunos que já tinham estudado as derivadas no ano lectivo anterior estavam mais habituados a trabalhar esse tema a partir da manipulação de complexas regras de derivação. Alguns desses alunos, os menos "arrojados", sempre que possível, tentaram encontrar a expressão analítica das funções cuja representação gráfica era apresentada nas fichas de actividades. A primeira tentativa de tradução representação gráfica—representação analítica foi realizada, a maior parte das vezes, evidenciando características de exemplos das funções mais utilizadas. Por exemplo, o gráfico de uma função quadrática tinha, a maior parte das vezes, como tradução analítica, a expressão $f(x) = x^2$. Por vezes, estes alunos, depois de lançarem, no computador a expressão analítica que imaginavam representar a função, concluíam que o gráfico não correspondia ao representado na ficha. Nessa altura, havia que investigar o que se passava — a parábola representada na ficha tinha a concavidade mais aberta, o que implicava alterar o coeficiente do termo em x^2; passava num ponto de coordenadas (x_1, y_1) em vez de passar no ponto de coordenadas (x_2, y_2), intersectava o eixo dos yy num ponto de ordenada y_3. Os alunos viram-se, deste modo, confrontados com um tipo de trabalho um pouco diferente daquele a que estavam habituados de anos anteriores.

Na realidade, o que aconteceu ao longo desta experiência de ensino foi um processo diferente de aprender e fazer matemática.

8.5.1. Trabalho em grupo

As actividades desenvolvidas com recurso a ferramentas computacionais, devido a condicionalismos de várias ordens, realizam-se, de uma maneira geral, em grupo. O nosso caso não fugiu à regra. De qualquer modo queremos sublinhar que as actividades propostas, visavam uma metodologia de trabalho em pequenos grupos, o que permitiu criar não só contextos sociais propícios à aprendizagem, como também desenvolver nos alunos um acréscimo de competência na resolução de problemas. Temos uma concepção do desenvolvimento de actividades matemáticas como um processo que pode ajudar a diminuir a ansiedade de alguns alunos que se julgam menos aptos, e não como um processo competitivo, acessível apenas a alunos sobredotados.

Os alunos aderiram, com entusiasmo, a esta metodologia de trabalho.

A interacção entre pares (aluno-aluno) desempenhou um papel de primeira ordem neste contexto educativo. Essa interacção foi importante, quer a nível dos objectivos cognitivos, quer a nível dos objectivos sociais. O desenvolvimento das actividades em grupo, com o auxílio do computador, levou os alunos a cooperar de uma forma sã e efectiva.

Os alunos, dentro do mesmo grupo, manifestaram diferentes opiniões, diferentes estratégias de resolver as questões. A troca de ideias nos grupos foi mutuamente benéfica uma vez que, obrigou não só a uma maior clarificação dos conceitos construídos mas também a uma confronto com estratégias diversificadas.

Os alunos que foram alvo de uma observação mais sistemática, manifestaram reacções de um verdadeiro envolvimento no grupo: comunicaram, ajudaram-se, deram sugestões, pediram opiniões, discordaram de algumas afirmações, concordaram com outras, analisaram situações, brincaram, riram, enfim, viveram este trabalho de uma maneira diferente.

O trabalho em pequenos grupos parece ser uma metodologia propícia a estudos que envolvem contextos computacionais e não só, como muitas vezes se alega, uma metodologia imposta pelo reduzido número de postos de trabalho.

8.5.1.1. O trabalho em grupo "obriga" a uma explicação

Aprende-se ouvindo, falando, explicando e pensando com os outros.

Foi-nos possível observar que os alunos, ao longo desta experiência de ensino, desenvolveram as actividades propostas através de uma comunicação constante quer com o colega de grupo, quer com a professora ou com a investigadora. Durante esta comunicação, geraram-se discussões que, do nosso ponto de vista, se manifestaram como facilitadoras e clarificadoras dos processos de raciocínio.

A procura de argumentos para convencer os colegas sobre qualquer conclusão, levou muitos alunos a clarificar e aprofundar as suas próprias ideias. Convencer um colega, requeria, a maior parte das vezes, que os argumentos fossem organizados de um modo coerente, para ultrapassarem o teste da crítica. A pessoa que explica tem que ser clara e segura para convencer e, nesse momento, está a aprofundar e a interiorizar. A explicação permite um aprofundamento dos conceitos a quem explica e a quem escuta. Durante esta intervenção vimos casos em que os alunos ao explicar, defender ou discutir uma linha de raciocínio se sentiram obrigados a reflectir acerca dos seus próprios processos de pensamento.

Por exemplo, o Luís Filipe e o Zé estavam divertidos e muito descontraídos a resolver a ficha I. Experimentavam, voltavam a experimentar, enfim, investigavam. O Zé não sabia como devia responder à questão: *Qual o declive de uma recta paralela ao eixo dos xx ?* O Luís Filipe sabia que o declive dessas rectas era zero mas, não sabia bem como explicar. Representou, no computador, o gráfico da função $y = 2$ e, considerou dois pontos sobre essa recta. Explicou:

> L. Filipe: Estás a ver. O valor de y é igual, quer consideremos este ponto ou este, logo ao calcular y_2-y_1 vamos obter o valor zero. Assim, o declive de uma recta paralela ao eixo dos xx tem que ser zero.

Na questão 1 da ficha I, os alunos determinaram o declive de algumas rectas representadas no ecrã do computador. Na questão 2 da mesma ficha, pedia-se aos alunos que completassem a frase: O declive de uma recta depende...

O Luís Carlos, que não tinha tido dificuldade em determinar os declives dessas rectas, não conseguia completar a frase e obrigou o Filipe, que não gostava de dar justificações, a fazê-lo.

L. Carlos: O declive de uma recta depende... ora bolas, não sei o que hei-de escrever aqui. Eu sei bem como se calcula o declive, mas não sei o que devo escrever.

Filipe: Então, o declive depende do ângulo que a recta faz com o eixo dos xx.

Inv: Sim, com o semi-eixo positivo dos xx.

Filipe: É por isso que quando a inclinação da recta é menor que 90^o, o declive é positivo, quando é maior que 90^o, o declive é negativo.

L. Carlos: Agora é que eu não consegui acompanhar.

O Filipe desenhou um círculo trigonométrico e o eixo das tangentes. Em seguida, traçou um ângulo do 1º quadrante e outro do 2º quadrante e perguntou ao Luís:

Filipe: Qual o sinal da tangente num caso e no outro?

L. Carlos: Está bem, está bem. Já percebi.

Na passagem que se segue, o Luís Filipe que deu uma resposta rápida quando a professora perguntou qual era a equação da recta que passava por um certo ponto e que tinha um determinado declive, sentiu alguma dificuldade em explicar o seu raciocínio ao colega. A justificação daquilo que, a princípio, era óbvio, complicou-se. O Luís Filipe clarificou a sua resposta a partir da interacção com o colega de grupo.

Prof: Se o declive é 2, e a recta passa pela origem do referencial, qual é a equação dessa recta?

L. Filipe: É y = 2x. [A professora entretanto foi apoiar outro grupo]

Zé: Afinal não percebi bem.

L. Filipe: Ouve lá. O valor de m não é dado por $\frac{y - y_0}{x - x_0}$?

Zé: Sim.

L. Filipe: Vais buscar 2 pontos, neste caso, por exemplo, os pontos (1, 2) e (2, 4) e assim vem $\frac{4 - 2}{2 - 1} = 2$. Isto é o declive da recta.

Zé: Sim. O declive é 2. E porque é que a recta fica y = 2x? É y = 2x por passar no zero?

L. Filipe: Sim. Passa no zero. Como a recta tem declive 2, fica y = 2x.

Zé: Continuo sem perceber...

L. Filipe: Sei lá...

O Luís Filipe não sabia muito bem como explicar aquilo que para ele era óbvio. O Zé deu uma sugestão que ajudou o Filipe a continuar a sua explicação.

Zé: A equação da recta é do tipo $y - y_0 = m (x-x_0)$.

L. Filipe: Sim. Então quando x = 0 e y = 0, como é que fica? y - 0 = m (x - 0), ou seja, y = mx. Como m = 2, fica y = 2x.

Zé: Está bem!....

L. Filipe: Ah!... Consegui... [Conseguiram...].

Ao longo deste estudo, são muitas as situações em que se verifica que, a necessidade de dar uma explicação a um colega, obriga a uma maior reflexão e a um aprofundamento muito importantes na construção do conhecimento matemático.

Na questão 2 da ficha VII, eram dados dois subconjuntos de $\Re$:

$X =]\,0,\ 1[$ e $Y =]-\infty,\ -1[\ \cup\ ]\,1,\ +\infty\,[$ e duas funções **f** e **g** definidas em X e em Y. Acrescentava-se ainda que f' (x) = 0, para todos os valores de $x \in X$ e que g' (x) = 0 para todos os valores de $x \in Y$. Pretendia-se saber se as funções **f** e **g** eram ou não constantes.

A Cristiana, começou por responder que ambas as funções eram constantes nos domínios indicados. Com o apoio da investigadora, concluiu que a função g podia não ser uma função constante em Y, mas quando tentou argumentar para convencer o Paulo, deparou-se com pequenos pormenores que, no início, lhe tinham passado despercebidos. A necessidade de dar uma explicação obrigou-a a uma reflexão que, certamente, não tinha acontecido se desenvolvesse uma actividade com o único objectivo de chegar a um resultado final correcto.

Crist: É que no Y pode ser assim e depois assim [Fez um esboço gráfico de uma possível função g (figura 8.31)]. Portanto, a primeira é verdadeira mas a segunda é falsa.

Inv: Percebeu, Paulo?

Paulo: Mais ou menos.

Inv: Cristiana, explique melhor esta questão ao Paulo, se faz favor.

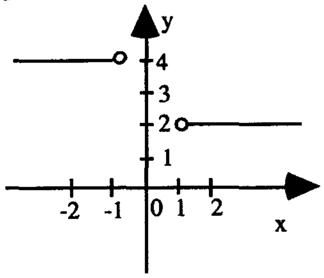


Fig. 8.31 - Gráfico feito pela Cristiana para explicar ao Paulo uma função que obedecesse às condições da questão 2 da ficha VII.

A investigadora aproveitava todas as oportunidades para levar os alunos a uma clarificação e verbalização das suas ideias.

Crist: Como isto é definido por ramos, faz de conta que para x < -1 era 4x e para x > 1...

Inv: Cuidado, a função tem que ser constante, não podia ser 4x.

Crist: Não, não *stora*, vou derivar e depois é que dá o 4.

Inv: Cuidado, mas a derivada tem que dar zero.

A investigadora mantinha-se atenta, apoiando os alunos sempre que necessário.

Crist: Claro. Tem razão, desculpe. Depois aqui era 2... Derivas, dá zero. 4 para aqui e 2 para aqui... é sempre uma recta... a derivada deste 2 também é 0. Estás a perceber?

Paulo: Sim, já percebi.

Na questão 2 da ficha V era dado o gráfico da função (figura 8.32) e pedia-se aos alunos que determinassem graficamente e caso existisse, a derivada da função no ponto de abcissa 2.

Na passagem que se segue pode verificar-se que o Paulo tentou ajudar a Cristiana a traçar correctamente as secantes.

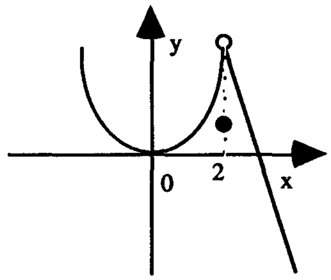


Fig. 8.32 - Gráfico da questão 2 da ficha V.

Além disso esta explicação obrigou a que, ele próprio, fizesse uma reflexão mais profunda sobre aquilo que afirmava. O Paulo, concluiu que, embora soubesse que não existia derivada da função no ponto, não conseguia determinar as derivadas laterais da função nesse ponto.

Crist: Como é que é aquele teorema? Não é contínua. Ela pode não ser contínua e ter derivada. Mas acho que não existe.

A Cristiana tentou uma justificação analítica. Não recebeu qualquer apoio do Paulo que lhe garantisse estar a utilizar uma boa estratégia e começou a traçar as rectas secantes. Afirmou:

Crist: Para um lado é $+\infty$ e para o outro é $-\infty$.

Paulo: Mas olha que o ponto não é esse.

A Cristiana considerava como ponto fixo a "bola aberta".

Crist: O ponto tem abcissa 2.

Paulo: Tens que fazer tangentes a partir desse pontinho aí em baixo e não a partir da "bola aberta".

Crist: É verdade... Ai que já não sei... Assim acho que existe.

Paulo: Não, não. Porque as rectas quando se aproximam vão fazer assim. [Faz as sucessivas rectas secantes movimentando a caneta sobre a ficha]. Então não existe.

Crist: À esquerda é $+\infty$ e à direita é $-\infty$.

Paulo: Pensas no ponto fixo e na tangente e vês onde é que a recta vai dar. Uma recta dá \ e a outra dá /, logo [as derivadas laterais] são diferentes. [Em seguida faz o esquema utilizando as mãos para dar ideia do movimento das secantes].

Crist: À esquerda é então $-\infty$... à esquerda é $+\infty$ e à direita é...

Paulo: É $-\infty$?... A função não está definida nesse ponto. Não chega a ser em cima do 2. Fica um pouco ao lado. Por isso nunca chega a ser $+\infty$ nem $-\infty$, fica um pouco ao lado... Um declive é negativo e o outro é positivo. Agora... qual é, também não sei.

O Paulo manifestou alguma relutância em falar de derivadas infinitas.

Ao longo desta experiência de ensino aconteceram também situações em que os alunos não conseguiram explicar o seu raciocínio aos colegas ou, pelo menos, não conseguiram convencê-los. Nos capítulos anteriores, já foram assinaladas algumas situações em que a Cristiana e o Paulo não conseguiram argumentar de forma a um alterar as convicções do outro. Esta dificuldade pode ser consequência das estratégias diferentes que estes alunos utilizavam no desenvolvimento das actividades.

Na questão 1 da ficha III, pedia-se aos alunos que representassem, graficamente, a função $f(x) = x^2$ e a sua função derivada. Em seguida, os alunos deviam indicar, por observação gráfica, a derivada da função em determinados pontos.

Crist: É a branca, não é? [Coloca a caneta na horizontal, partindo do ponto onde a ficha do Paulo (colocada também sobre o ecrã, na vertical) encontra a recta]. Eu acho que é 2. [O Paulo não está muito convencido e continua a colocar a folha, ora na vertical, ora na horizontal para ver se, na realidade, a ordenada é 2].

Paulo: A gente não pode ir buscar aquela tabela de valores?

A Cristiana tentava convencer o Paulo com um argumento pouco convincente e que apelava a um raciocínio baseado numa proporcionalidade. Não o conseguiu convencer e sentiu-se incapaz de explicar de outra forma como podemos ver pela passagem que se segue.

Crist: Não, nesta opção não. Eu acho que é 2. E isto até bate certo. O f' (0) é 0, o f' (2) é 4, então o f' (1) deve ser mesmo 2, porque um é o dobro do outro. Não estás a ver mesmo que é 2? Vá lá Paulo, toma nota dos resultados na ficha para passarmos à frente. [O Paulo continua a olhar para o computador e parece não concordar com a Cristiana].

Crist: Vamos lá. Temos que continuar. Podes escrever diferente daquilo que eu escrevi, não és obrigado a concordar comigo...

Para a formação de grupos de trabalho pode ser importante ter em consideração o modo como cada aluno se relaciona com a Matemática.

8.5.1.2. Cada grupo caminhava ao seu ritmo

Os alunos precisam de tempo para desenvolver as actividades que lhes são propostas. A metodologia desta experiência de ensino permitiu que cada grupo trabalhasse ao seu ritmo. Com alguma frequência, na mesma aula, os vários grupos desenvolviam actividades diferentes. Os alunos sabiam que não seriam penalizados e avaliados pelo cronómetro que marca a rapidez de resolução e a correcção da resposta final.

Na questão 1 da ficha III pedia-se aos alunos que representassem os gráficos da função $f(x)=x^2$ e da sua função derivada. A partir da observação do gráfico da função derivada, os alunos deviam indicar a derivada da função em vários pontos.

O Luís Carlos e a Ana Luísa seguiram as indicações dadas na ficha e viram nascer, lentamente, no ecrã do computador, o gráfico da função derivada. Contudo, a Ana Luísa estava preocupada com aquela espécie de magia que parecia acontecer no computador. Perguntava ela: "E se não tivesse computador? Como resolveria a questão? Como encontraria a recta da derivada?" A gestão do tempo estava a seu cargo, por isso, podiam pensar na questão com calma.

L. Carlos: Vai-nos dar uma recta.

A. Luísa: Há uma coisa que eu não estou a perceber. Se eu não estivesse a trabalhar com o computador e se tivesse uma função quadrática, como é que eu encontrava a função derivada, sem ser através das regras? Como é que eu fazia?

Inv: Ia pensar assim. Por exemplo, neste ponto...

L. Carlos: Tinhas que saber um ponto.

Inv: Traçava a tangente e calculava o declive da recta tangente à curva nesse ponto. Depois fazia a mesma coisa num outro ponto e marcava o valor.

A. Luísa: Está bem. Eu traçava esta tangente à curva neste ponto. E depois?

Inv: Tinha que saber qual era o declive desta recta.

A. Luísa: Sim, e o declive...

Inv: Depois tinha que marcar esse valor.

A. Luísa: O declive é que eu ia marcar.

Inv: Sim. Pensava assim, no ponto 1 a derivada é tanto... e marcava essa valor.

L. Carlos: Calculavamos a derivada da função em cada ponto.

A. Luísa: O declive é marcado aqui [e apontava o eixo dos yy].

Inv: Se soubesse que lhe iria dar uma recta, bastava calcular a derivada em dois pontos.

L. Carlos: Claro.

Inv: Tente explicar o que fez, Luís. O que é que está aí feito?

L. Carlos: Aqui feito? Está a derivada... num ponto. Temos a derivada neste ponto.

A. Luísa: Então estes vários "pontinhos" são o valor do declive de cada tangente. Então esta recta chama-se a recta da tangente?

Inv: Chama-se a função derivada.

L. Carlos: É o f'.

A propósito da questão 1, da ficha II, o Luís Carlos lembrou-se da função que tinha saído no teste de avaliação e, sem qualquer preocupação, deixou, por uns momentos, a ficha de actividades que estava a desenvolver para visualizar o gráfico dessa função.

L. Carlos: Ouve lá. Como é que tu justificaste a pergunta do gráfico do teste? Qual foi o gráfico que te deu? Como é que justificaste?

Filipe: Foi o C. Como é que eu justifiquei?

L. Carlos: Crescia, a derivada era positiva. Decrescia, era negativa.

Filipe: Sim. Passava por um zero...

L. Carlos: Crescia de novo, passava por um zero e crescia de novo. Vamos experimentar aqui para ver se dá. Eu, a seguir a esta, quero ver uma outra coisa. Como é que se lança aqui log(x)?

Em relação à questão 7 da ficha V, em que era necessário escolher, de entre cinco gráficos dados, aquele que representava a função derivada de uma dada função, o Paulo respondeu, quase intuitivamente, como era seu hábito, que era o gráfico C. A Cristiana, que evidenciava dificuldades na interpretação dos gráficos, não se deixou "atropelar" pela rapidez da resposta dada pelo Paulo. Ao seu ritmo e método próprio, foi analisando e fazendo uma selecção cuidadosa e criteriosa dos gráficos que lhe eram apresentados.

Paulo: É o C [olhou e, quase sem ter tempo de pensar, afirmou que era o C).

Cris: Eu ainda não vi... Tem que ser aberto no ponto 2. Então o E não é. O A também não é. Até ao 2 tem que ser positiva e depois do 2 tem que ser negativa. O C é positiva até ao 2 e negativa a seguir e não está definida no ponto 2, logo é o C. Como é que eu vou justificar a resposta? No ponto x = 2 não existe derivada. À direita a derivada é negativa e à esquerda é positiva.

Em relação a esta passagem parece-nos importante sublinhar, mais uma vez, as características destes alunos. O Paulo, que revelou ao longo deste estudo uma preferência por uma estratégia geométrica na resolução das questões, parece-nos ter adquirido uma percepção mais global das noções envolvidas neste tipo de actividades. A Cristiana, preferia estratégias analíticas e manifestava algumas dificuldades na interpretação dos gráficos. Assim, esta aluna, parece não ter desenvolvido uma percepção global dos gráficos das funções.

Em resumo: O trabalho em pequeno grupo, foi uma das componentes do ambiente que se viveu durante esta experiência de ensino. A metodologia de trabalho em pequenos grupos permitiu criar não só contextos sociais propícios à aprendizagem mas desenvolver nos alunos um acréscimo de competência na resolução de problemas. O desenvolvimento das actividades, resolvidas em grupo, com o auxílio do computador, levou os alunos a cooperar de uma forma sã e efectiva. Diminuiu a ansiedade de alguns alunos que se julgavam menos aptos para fazer matemática, aumentou a confiança própria dos que tinham medo de falhar e de dar respostas erradas, aguçou a curiosidade daqueles que gostavam de saber os porquês, permitiu a formulação de conjecturas pelos próprios alunos e a sua verificação.

Dentro do mesmo grupo, os alunos manifestaram ideias diferentes na resolução das questões e, a troca dessas ideias, foi benéfica uma vez que obrigou não só a uma maior clarificação dos conceitos mas também a uma confrontação de estratégias diferentes de resolução. Os alunos manifestaram um verdadeiro envolvimento no trabalho desenvolvido em grupo: comunicaram, ajudaram-se uns aos outros, deram sugestões, pediram opiniões, discordaram de algumas afirmações feitas, analisaram situações, brincaram, riram. Geraram-se discussões interessantes que, do nosso ponto de vista, tornaram mais claros os processos de raciocínio utilizados pelos alunos. A procura de argumentos para convencer os colegas sobre qualquer conclusão levou, muitos alunos, a clarificar e aprofundar as suas próprias ideias.

Cada grupo trabalhava ao seu ritmo. Por vezes, na mesma aula, os vários grupos desenvolviam actividades completamente diferentes. Os alunos sabiam que as tarefas propostas não deviam ser desenvolvidas numa corrida contra o tempo. Geriam o tempo sem receio de sofrerem qualquer penalização por um atraso, ou por uma resolução menos correcta.

8.5.2. Ambiente de trabalho dinâmico

Pode ler-se no diário da investigadora: "Os alunos estão muito descontraídos. Trabalham, discutem, experimentam, investigam, riem, brincam, estão divertidos a desenvolver as actividades propostas. Dá gosto olhar para aquelas caras risonhas. Não estão, certamente, a desenvolver uma tarefa que os aborrece". Este era, de uma maneira geral, o ambiente de trabalho que se vivia nestas aulas. Encontramos, no diário da investigadora, outras frases que ajudam a descrever este ambiente "Já tocou para a saída, mas os alunos continuam a trabalhar como se nada tivesse acontecido. Nunca têm pressa de sair". E, mais à frente: "os alunos permanecem bastante tempo a olhar para o computador. Apontam, discutem e só depois escrevem na ficha de trabalho". Hoje os alunos parecem estar um pouco cansados. Acabaram de fazer um teste de avaliação de Matemática. De qualquer modo, estão presentes treze alunos que realizam as tarefas com agrado. A certa altura, o Filipe e o Luís Carlos, recorreram ao computador para visualizar o gráfico de uma função do teste de avaliação. Dizia o Filipe: Agora que já visualizei a situação penso que já consigo fazer as 'continhas' todas em casa".

Não há dúvida que o ambiente destas aulas era dinâmico: os alunos tornaram-se, mais activos, mais reflexivos, fizeram mais investigação, trabalharam mais em grupo. A professora e a investigadora conduziram o trabalho colocando questões orais ou escritas, observaram as interacções desenvolvidas nos grupos, deram sugestões e esclarecimentos, diagnosticaram e ajudaram a ultrapassar dificuldades, moderaram ou incentivaram discussões.

De sublinhar a aquisição progressiva de autonomia dos alunos no desenvolvimento das tarefas com que se viam confrontados.

Os alunos sentiram que o ambiente que se vivia naquela sala e o tipo de aprendizagem que estava a ser levada a cabo eram diferentes do habitual. Dizia a Cristiana, em conversa informal com a investigadora: "Às vezes estamos a 'decorar' em vez de perceber. Por exemplo, em relação ao declive, eu sabia que na recta $y = 4x+2$, o declive era 4, mas não percebia que quanto maior fosse o número maior era a inclinação, a recta A está mais a 'pique'. Aqui aprendemos de uma maneira diferente".

Os alunos demonstraram uma atitude positiva em relação à Matemática e ao desenvolvimento das actividades. Todos referiram que as actividades desenvolvidas com o apoio do computador tinham gerado uma maior motivação e entusiasmo pela disciplina de Matemática.

8.5.2.1. As actividades desenvolvidas em ambientes computacionais obrigam a uma reflexão

Uma aprendizagem activa tem por base a ideia de que o aluno deve construir, por si próprio, os conceitos. Para que isso aconteça, este deve estar interessado e sentir gosto por essa aprendizagem. Os ambientes computacionais podem ser um dos motores dessa motivação.

Estamos convictas de que, o *feedback* devolvido pelos gráficos no ecrã do computador, não só apoiou os alunos na resolução das questões como também os ajudou a reflectir sobre os processos utilizados nessa resolução. Na realidade, reconhecemos que o facto de os alunos se confrontarem com o desenvolvimento de actividades não se limitando a reproduzir o que o professor dizia, ajudou-os a aprofundarem os conceitos explorados durante esta intervenção.

Na questão C-1.a) da ficha I, pedia-se aos alunos que representassem, graficamente, uma função de segundo grau e que determinassem o declive da recta tangente à curva no ponto de abcissa 1. Chamava-se ponto fixo ao ponto de coordenadas (1, 0) e dava-se aos alunos a indicação de que deveriam considerar um ponto móvel sobre a curva, por exemplo, o ponto de coordenadas (5, 4), para o computador poder começar a traçar uma primeira recta secante.

O Luís Carlos, não executou as restantes indicações da ficha sem perceber a razão porque devia considerar aquele ponto móvel.

L. Carlos: [Lê] *Para isso consideremos um ponto P (5, 4) sobre a curva* Para quê? Não percebi isto.

Inv: O que nós pretendemos é determinar o declive da recta tangente à curva...

L. Carlos: No ponto de coordenadas (1, 0).

Inv: Sim, neste ponto aqui. Ou seja, queremos saber o declive desta recta [aponta no ecrã, com a caneta]. O ponto (5, 4) é este. É um ponto em que é fácil ler as coordenadas.

L. Carlos: Mas para que vamos considerar esse ponto?

Inv: Sim, para quê, Filipe?

Filipe: É para fazermos a derivada, ou seja, para fazermos as cordas... As cordas a tender para a tangente.

Inv: Sim. A primeira secante é esta. O programa vai dar as sucessivas rectas secantes até obtermos uma recta tangente à curva no ponto de coordenadas (1, 0). O ponto (5, 4) é o ponto móvel. Podia ser outro qualquer.

L. Carlos: Ah! Está bem, é o ponto móvel... Mas... não estou ainda a perceber bem...

A investigadora deu algumas sugestões no sentido de ajudar o Luís Carlos a ultrapassar as dificuldades com que este se deparava. O Luís Carlos continuou a interrogar-se...

L. Carlos: Porque é que eu digo que $x = 1$?

Inv: É a abcissa do ponto no qual quer determinar a derivada.

L. Carlos: É verdade. É o ponto fixo.

Na questão 1 da ficha II pedia-se aos alunos que representassem, graficamente, a função $f(x) = | x^2 - 4 |$ e que determinassem o declive da recta tangente à curva representativa da função no ponto de abcissa 2, considerando, numa primeira fase, um ponto móvel à direita desse ponto e, em seguida, um ponto móvel à sua esquerda.

O Luís Filipe e o Zé, não se limitaram a ler e a dar as indicações necessárias à resolução da questão. Foram reflectindo, constantemente, sobre o que estava a acontecer no ecrã do computador: "Se tivéssemos dado uma distância ainda mais pequena, obtinhamos mais rapidamente esse valor 4...".

L. Filipe: O ponto fixo é (2, 0). Podemos considerar um ponto qualquer à direita. Se queremos um ponto móvel à direita, a distância tem que ser positiva. Está a tender para 4. Se tivéssemos dado uma distância ainda mais pequena, obtinhamos mais rapidamente esse valor 4.... Agora para calcularmos à esquerda, a distância tem que ser negativa.

Zé: Dá -4.

L. Filipe: Pois é, -4. Significa que o limite à direita é 4 e à esquerda é -4, ou seja não tem limite. Como o limite à esquerda é diferente do limite à direita não existe uma só recta tangente mas sim duas.

Zé: Pois é.

L. Filipe: São duas semi-tangentes.

O *software* com que os alunos trabalharam permitia a indicação do número de pontos em que deveria ser calculada a derivada da função, através da indicação do valor de **h**. O Luís Carlos, que gostava de saber os porquês de tudo o que fazia, não percebeu a necessidade dessa indicação. O apoio dado pela investigadora, ajudou o aluno a reflectir, e o fruto dessa reflexão está bem visível na afirmação: "Quanto menor for o valor de h, mais a recta se aproxima da recta da função derivada, y = 2x... os 'saltinhos' são menores..."

L. Carlos: O que é este h? Não estou a perceber o que é este h.

Inv: Neste caso o computador só calculou a derivada da função em pontos de 0,1 em 0,1. Se quisessemos que calculasse a derivada em mais pontos, podiamos considerar, por exemplo, h = 0,01 ou h = 0,001.

L. Carlos: Pois é.

Inv: Em qualquer dos casos, vamos obter uma recta.

L. Carlos: Quanto menor for o valor de h mais essa recta se aproxima da recta da função derivada, y = 2x.

Inv: Exactamente.

L. Carlos: [Experimentaram com h = 0,01] Os "saltinhos" que ele dá são menores.

Em relação à mesma questão, o Zé e o Bruno, determinaram a expressão analítica da função derivada a partir das regras de derivação. Lançaram no computador a expressão obtida e verificaram que a recta representativa dessa função não coincidia com a que tinham obtido a partir da opção própria do programa. Este facto foi aproveitado pela investigadora para ajudar os alunos a reflectir naquela discrepância.

Inv: Já têm o gráfico da função e o gráfico da sua função derivada.

Bruno: Mas não coincide exactamente com o gráfico da função f(x) = 2x.

Inv: Não é muito diferente. Consideraram h = 0,1. Se considerassem um valor mais pequeno, as rectas ficavam, praticamente, sobrepostas. O computador não calcula limites. Calcula declives de secantes que passam por dois pontos muito próximos. Como é que obtiveram a expressão da derivada?

Zé: Nós derivamos pelas regras e introduzimos a função derivada f(x) = 2x.

Inv: Malandrice... Não era isso que se pedia. Mas está bem. Deu para perceber o que é que o computador faz para determinar a função derivada.

Na questão 2 da ficha IV eram dados os gráficos de quatro funções (figura 8.33) e pedia-se aos alunos que traçassem, no mesmo referencial, o gráfico das suas funções derivadas.

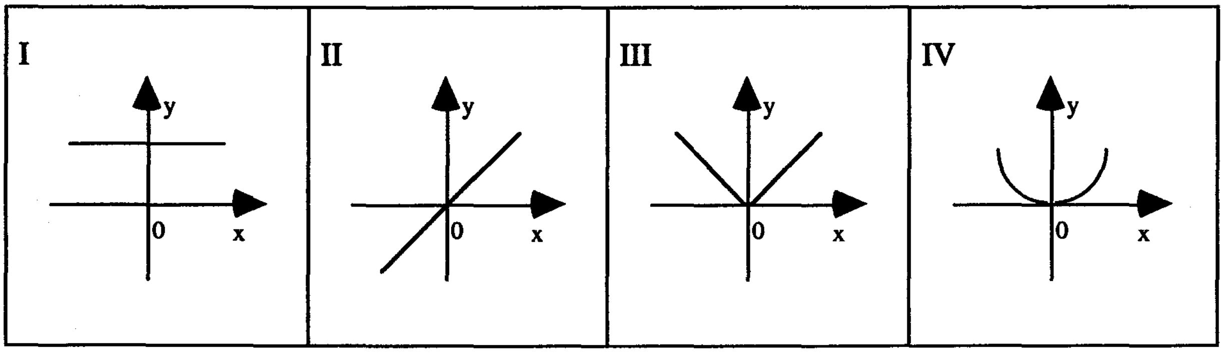


Fig. 8.33 - Gráficos da questão 2 da ficha IV.

O Luís Filipe e o Zé recorreram ao computador para confirmar a derivada do gráfico II. Em relação ao gráfico III, recorreram, de imediato, ao computador. O gráfico da derivada exibida no ecrã deu origem a uma grande reflexão e discussão. Não esperavam aquele tipo de gráfico.

L. Filipe: [Em relação à função II] Ali, ali é uma recta... a derivada.

Zé: É?

L. Filipe: Então vai depender do declive, é uma recta y = 1 porque, como o declive é 1...

Zé: Sim. Acho eu.

L. Filipe: Espera, podemos ver isso... [ligaram o computador]. A função que temos que introduzir é x.

Zé: Agora faz a derivada, ou melhor a função derivada.

L. Filipe: Que espanto! Perfeito.

Zé: Agora vamos fazer esta, que é o módulo de x.

L. Filipe: Mas eu pensava... Mas fica assim? Eu sabia que ia ficar negativo num e positivo no outro, mas com esta "cena" aqui no meio.

Zé: Pois é...

L. Filipe: Será? O declive é 1, portanto as rectas são 1 e -1. E quando é 0? Quando se aproxima para 0 com uma distância 1, é aquilo. Quando a distância for -0,1... faz o *Plot*, dá -1, percebes? Porque ali é um ponto diferente.

Em relação ao gráfico da função IV, a Cristiana e o Paulo reflectiram e esclareceram alguns conceitos. A Cristiana, observou o gráfico e associou-lhe a representação analítica da função modelo de uma função de segundo grau, $y = x^2$. Tratava-se de uma parábola com a concavidade voltada para cima e com o zero coincidente com a origem do referencial, o que, possivelmente, originou essa associação. Utilizou as regras de derivação e concluiu que a função derivada seria representada pela recta de equação y = 2x. O Paulo utilizou a sua privilegiada estratégia geométrica. Traçou a recta tangente à curva representativa da função no ponto de abcissa 2 e, por observação gráfica, considerou que o declive dessa recta era 1. Concluiu, desse modo, que a recta representativa da função derivada iria passar pelos pontos de coordenadas (2, 1) e pela origem do referencial.

Estes dois alunos trabalharam individualmente no desenvolvimento desta actividade. Utilizando estratégias diferentes, estes alunos chegaram a resultados diferentes. Este facto, obrigou os alunos a uma reflexão conjunta sobre os conceitos envolvidos.

As fichas de trabalho dos alunos foram, a maior parte das vezes, corrigidas em conjunto pela professora e pela investigadora. O diálogo que se segue foi travado durante uma dessas actividades de correcção de fichas de trabalho. A professora mostrava-se preocupada com o facto de, alguns alunos não conseguirem calcular a derivada de uma função num ponto e por ler justificações pouco cuidadas. Contudo, reconhecia que os alunos que participavam nas aulas extra-lectivas eram aqueles que gostavam mais de **reflectir**.

> Prof: Estes alunos ainda têm muita dificuldade em calcular a derivada de uma função num ponto. Expliquei tantas vezes o traçado da recta tangente, a partir das rectas secantes mas eles não sabem. Outra coisa que me preocupa são as justificações que os alunos dão. Eles não sabem escrever.
>
> Inv: Nota-se uma diferença significativa no modo como os alunos resolvem as questões. Porquê esta diferença? Será consequência do uso do computador?
>
> Prof: Não me parece podermos afirmar que é resultado apenas do computador. O que acontece é que os alunos que vão a essas aulas às aulas não são os melhores alunos mas são o tipo de alunos que gostam de pensar, **gostam de reflectir,** gostam de saber as razões, os porquês. Não estão a decorar regras mas a tentar perceber, a visualizar situações. Os outros alunos acham que as tarefas com computador são muito fáceis e então não vêm. Mas o que é verdade é que, muitos deles, sabem fazer cálculos e mais cálculos mas não percebem o que estão a fazer e quando lhes coloco uma questão que os obriga a pensar, falham. Este último teste que tinha questões deste tipo, foi um êxito para os alunos como o Filipe e a Cristiana (tiveram as melhores notas da turma). Os testes destes alunos mostram que aquelas cabeças sabem o que estão a fazer. Há alunos da Turma 5 que são bons alunos que nunca quiseram ir aos computadores e estão a ver-se aflitos com a interpretação de gráficos.

8.5.2.2. Os alunos relacionam situações matemáticas com situações reais

Ao longo deste estudo, constatámos que os alunos desenvolveram algumas das actividades relacionando situações matemáticas com situações reais. Vejamos, por exemplo, como é que o Luís Filipe resolveu a questão 3 da ficha VI em que se afirmava que uma bola lançada verticalmente de baixo para cima atingia uma altura h, em metros, ao fim de t segundos dada pela expressão $h = 16t - 4t^2$. Perguntava-se: *o instante em que a tangente à curva descrita* *pela bola era horizontal; durante quanto tempo as tangentes à curva tinham declive positivo; e se as tangentes ao gráfico teriam declive negativo.*

O Luís Filipe resolveu esta questão apelando constantemente à relação entre os conteúdos matemáticos e o contexto real da situação.

Inv: As tangentes ao gráfico terão declive negativo?

L. Filipe: É quando a função é decrescente. É quando a bola vem a descer.

Crist: É quando $t > 2$ s.

Inv: Exacto. É mesmo quando a bola vem a descer. Mas ela chega ao solo quando?

L. Filipe: Sim. É aqui.

Inv: Não devem escrever só $t > 2$. Assim dava ideia que continuava indefinidamente.

Crist: Então pomos entre 2 e 4.

L. Filipe: Porque o t só vai estar definido entre 0 e 4, momento em que toca no chão.

8.5.2.3. A visualização desempenha um papel importante na aprendizagem

Os conceitos com suporte geométrico foram abordados dessa maneira, como, por exemplo, os conceitos de: declive de uma recta, taxa de variação, recta tangente a uma curva num determinado ponto, derivada de uma função num ponto, função derivada.

A visualização dos gráfico no computador, proporcionou aos alunos uma percepção global de alguns conceitos matemáticos.

Quando os alunos tentaram reproduzir, no ecrã do computador, os gráficos que figuravam nas fichas de actividades, foram confrontados com tarefas de exploração que os levaram a conjecturar, experimentar, reflectir, alterar. A visualização das suas ideias concretizadas no ecrã foi um dos grandes motores de todo este processo de construção do conhecimento.

Os próprios alunos referiram o papel importante da visualização no desenvolvimento das actividades. Dizia o Luís Carlos em relação à resposta dada a uma questão de um teste de avaliação: "Eu respondi certo e penso que a minha sorte foi precisamente ter-me lembrado da visualização das rectas secantes e tangentes, no computador".

A Cristiana também sublinhou o papel da visualização no estudo das funções, como se pode ver pelo diálogo que se segue.

Inv: Qual a vantagem que vêem na utilização do computador?

Crist: Dá para visualizar melhor o gráfico de uma função. Às vezes estamos à espera que aconteça uma coisa e o que acontece é outra. Na aula não temos essa ajuda... Na aula não consigo ver essa história do tender para mais infinito e para menos infinito, como aqui vejo.

Inv: Vocês estão à espera de uma coisa e aparece outra, é isso?

Crist: Sim. E depois na aula não temos essa ajuda e depois quando dá um valor que nós conseguimos calcular e depois, por exemplo, tende para $+\infty$ e eu estava à espera que neste ponto a função estivesse a tender para $-\infty$ e afinal deu para $+\infty$. Na aula não consigo visualizar estas situações. Isto em relação ao gráfico da função $y = \frac{1}{x^2}$. Na aula normal não consigo ver bem estas situações. Pelo menos não consigo visualizar.

No início de uma aula, a Cristiana disse que estava muito contente com a nota que tinha tido no teste e que sentia que tinha conseguido resolver as questões relacionadas com os gráficos de funções devido às aulas com recurso ao computador: "O computador tem-me ajudado muito na **visualização** dos gráficos".

Em resumo: É importante sublinhar o ambiente que se viveu durante esta investigação, nas aulas com computadores que os alunos frequentaram, voluntariamente, em horário extra-lectivo. Os alunos descontraídos e entusiasmados no desenvolvimento das tarefas, discutiram, experimentaram, investigaram, brincaram com a Matemática. Tornaram-se mais activos, trabalharam mais em grupo, fizeram mais investigação, adquiriram mais autonomia. O papel quer da professora quer da investigadora foi o de conduzir, mais do que o de explicar.

Os alunos afirmaram que o ambiente que viveram naquela sala era diferente do habitual: "Aqui aprendemos de uma maneira diferente".

Os alunos precisam de tempo para realizar e debater as actividades que lhes são propostas e a metodologia utilizada nesta intervenção didáctica foi propícia ao desenvolvimento de actividades ao ritmo de cada um. Os vários grupos efectuaram, na mesma aula, actividades diferentes. Sabiam que não eram penalizados pelo tempo de resolução das questões.

O ambiente computacional foi um dos motores da aprendizagem activa que sentiu nestas aulas. Estamos convictas de que, o *feedback* devolvido pelos gráficos no ecrã do computador não só apoiou os alunos na resolução das questões como também os obrigou a reflectir sobre os processos utilizados nessa resolução. A incompatibilidade entre o que os alunos tinham escrito no papel e o que aparecia no ecrã do computador levou-os, muitas vezes, a reflectirem sobre os processos de resolução.

Os alunos que participaram neste estudo demonstraram uma atitude positiva em relação à Matemática e em relação ao desenvolvimento das actividades. Alguns declararam que essas actividades tinham gerado uma maior motivação e entusiasmo pela disciplina de Matemática.

8.6. Apreciação do programa de computador utilizado

Neste estudo, o programa *A Graphic Approach to the Calculus* foi utilizado como instrumento de investigação, permitindo a elaboração de conjecturas e a exploração de conceitos de Análise através da visualização de gráficos.

8.6.1. Vantagens do *software* utilizado

Salientam-se algumas das características do programa que nos mereceram particular atenção e que o tornaram uma poderosa e autêntica ferramenta para o ensino e aprendizagem do tópico específico das derivadas de funções. Estas características devem estar presentes nos programas que visem a exploração gráfica de funções e derivadas.

De realçar:

- Programa de utilização muito simples;
- Possibilidade de sobrepôr vários gráficos de funções;
- Possibilidade de visualizar a recta tangente a uma curva num ponto como o limite das rectas secantes.
- Possibilidade de visualizar a derivada de uma função num ponto como o declive da recta tangente à curva nesse ponto. Esta característica do *software* possibilitou uma interpretação geométrica do conceito de derivada;
- Possibilidade de visualizar as rectas tangentes à curva representativa da função em vários pontos e o "nascer" da função derivada, importante para os alunos entenderem a função derivada como uma função.
- Possibilidade de visualizar a sobreposição dos gráficos da função e da função derivada, permitindo um fácil e rápido relacionamento das características de ambas;
- Possibilidade de visualizar simultaneamente as múltiplas representações de uma função: analítica, gráfica e numérica.

8.6.2. Dificuldades que podem surgir com o *software*

Embora as tecnologias abram possibilidades novas, devemos estar atentos às novas dificuldades que podem surgir.

Alguns alunos demoraram um certo tempo até se sentirem à vontade para trabalhar com o computador, uma vez que não tinham tido, até essa altura, qualquer tipo de experiência na sua utilização.

Na primeira ficha de trabalho, na secção C — **Tangente a uma curva num ponto** — era dada uma função do segundo grau e pedia-se aos alunos que, recorrendo ao computador, fizessem a sua representação gráfica e determinassem o declive da recta tangente à curva nalguns pontos. Os alunos visualizaram as secantes aproximando-se, no seu limite, da tangente à curva nesses pontos., de uma forma dinâmica, e de acordo com o que professora tinha explicado na sala de aula habitual. A indicação do ponto fixo e do ponto móvel sobre a curva era tarefa dos alunos. De início, não foi fácil para alguns alunos, as indicações desses pontos, principalmente a indicação do ponto móvel uma vez que o programa não aceitava, directamente, as coordenadas desse ponto. Era necessário indicar a distância a que o ponto móvel se encontrava do ponto fixo. A indicação de um valor negativo para valor da distância (que era interpretado, pelo programa, tratar-se de um ponto à esquerda do ponto fixo), levantou algumas questões a alunos que gostavam de pensar e saber os porquês — "Posso pôr uma distância negativa?".

> L. Carlos: Ah! Está bem, é o ponto móvel. Não estou ainda a perceber bem. Mas este ponto (5, 4)... já me estão a dizer... está sobre a curva. Porque é que digo que $x = 1$?
>
> Inv: É a abcissa do ponto em que quer determinar a derivada.
>
> L. Carlos: É verdade. É o ponto fixo. Então, o ponto fixo é este [apontou sobre a curva, o ponto de abcissa 1] e o ponto móvel este [apontou o ponto com abcissa 5]. Então *Distance* é 4.

O aluno percebeu que o valor de D (*Distance*) que o programa pedia era a diferença entre as abcissas do ponto fixo e do ponto móvel.

> Inv: [No ecrã está traçada a primeira secante] O que é que está representado, no ecrã?
>
> L. Carlos: Tenho a corda que une o ponto fixo ao ponto móvel.
>
> Inv: E esta tabela que está ao lado, o que é?
>
> L. Carlos: *Slope*... Isto há-de ser a inclinação desta recta, desta corda.

O Luís Carlos utilizou, com frequência, a palavra inclinação como sinónima de declive.

> Inv: É o declive dessa recta secante. Continue a pressionar *Enter*. O que é que está a obter? De que valor é que se está a aproximar [o declive]?

L. Carlos: De 2... o declive é 2.

[O Luís Carlos lê o início da página 4... (Pede-se para traçar a recta secante que "passa" nos pontos P e num ponto Q à esquerda de P). Pára, para fazer uma pergunta]:

L. Carlos: Então o ponto fixo é o mesmo, não é? Agora vou ver quanto é a tangente quando vem de números negativos. Ou melhor, inferiores... inferiores àquele ponto fixo. Como é que eu fiz para pôr o ponto móvel? A distância neste caso vai ser...

Na ficha de actividades era dada a indicação das coordenadas do ponto móvel à esquerda do ponto de abcissa 1, o ponto de coordenadas (-1,-5). Os alunos deveriam determinar o valor da distância do ponto fixo ao ponto móvel e considerar um valor negativo por se tratar de um ponto colocado à sua esquerda.

L. Carlos: Não. É de 1 até -1. É 2.

Inv: 2?

L. Carlos: É -2?... Posso pôr uma distância negativa?

Inv: Tem que dizer -2 para ter o ponto móvel à esquerda do ponto fixo.

L. Carlos: É que uma distância nunca é negativa... O sinal é só para dizer que é por valores inferiores.

O Luís Carlos, um aluno que, sistematicamente, pensava alto, percebeu a razão porque devia atribuir um valor negativo para a distância do ponto fixo ao ponto móvel, contudo a palavra *Distance* pode originar uma concepção de que uma distância pode tomar um valor negativo.

Na questão 1, da ficha II pedia-se aos alunos que representassem, graficamente, a função $f(x) = | x^2 - 4 |$ e que determinassem o declive da tangente à curva no ponto de coordenadas (2, 0). O Luís Carlos teve alguma dificuldade em utilizar o programa para calcular esse valor.

Inv: Qual é, neste caso, o vosso ponto fixo?

L. Carlos: É o 2.

Inv: Podem calcular... se consideram que o ponto móvel é o ponto (3, 5), a distância...

Filipe: A distância é 1.

L. Carlos: Agora é carregar em *Enter*.

Filipe: 4 é o limite. Não te esqueças que só calculaste o valor à direita. Temos que considerar agora o outro ponto móvel. O ponto (1, 3). Agora vamos ver o que se passa à esquerda.

L. Carlos: Não, mas nós pusemos um ponto...[O Luís parece estar um pouco baralhado]

Inv: À direita, não foi?

L. Carlos: Não. Fizemos o ponto que nos pediram.

Filipe: Não. Fizeste a tangente vinda da direita.

L. Carlos: Agora temos que pôr este (1, 3)... O x é 1 e o y é 3. Está bom. Isto aqui continua a ser 2, não é?

Inv: A distância não pode ser 1. Se escrever 1, obtém rectas secantes vindas da direita.

Filipe: Está bem! Podemos considerar -1.

L. Carlos: Então as derivadas não são iguais.

O Luís Carlos esperarava o mesmo valor para as derivadas laterais. No início da experiência de ensino, este aluno não conseguia, por simples observação gráfica, afirmar que não existia derivada naquele "bico". O Filipe aguardava uma confirmação.

Filipe: Claro. Se tivesses olhado bem para aqui vias logo... É só para te certificares.

Os alunos foram chamados várias vezes a atenção de que o computador determinava o declive das rectas secantes calculando o quociente entre o incremento de y correspondente a um determinado incremento de x e que, à medida que o incremento de x se ia aproximando de zero, as rectas secantes aproximavam-se da recta tangente à curva nesse ponto. Pareceu-nos que, por vezes, os alunos não conseguiram fazer conexões adequadas entre aquilo que visualizavam no computador e a determinação do limite de uma razão incremental. Alguns alunos não conseguiam determinar, graficamente, a derivada de algumas funções em determinados pontos, principalmente nos "bicos" e nos pontos de descontinuidade da função. Um dos erros mais comuns, como já referimos, prendeu-se com um incorrecto traçado das rectas secantes. Concluímos assim que, alguns alunos, quando visualizavam, no ecrã do computador, o cálculo do derivada de uma função num ponto não o conseguiam associar à determinação do $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Contudo, queremos sublinhar que muitos dos pontos em que os alunos deviam determinar, graficamente, se existia ou não derivada da função, eram pontos de descontinuidade ou "bicos". O *software* que os alunos utilizaram não permitia introduzir todos os tipos de funções. Não era possível introduzir, por exemplo, a maior parte das funções definidas por ramos, o que pode ter dificultado a tarefa dos alunos quando se viram confrontados com a determinação da derivada de uma função num "bico" e num ponto de descontinuidade. Queremos ainda acrescentar que, nas aulas tradicionais, os alunos não são, normalmente, confrontados com este tipo de situações. Tarefas mais comuns nessas aulas são aquelas em que os alunos devem concluir se existe ou não derivada de uma função num determinado ponto através de uma estratégia analítica da utilização da definição de derivada de uma função num ponto que, de uma maneira geral, obriga a complexos cálculos de limites e ao levantamento de indeterminações.

Algumas situações levaram-nos a admitir que, por vezes, alguns alunos, se sentiram um pouco dependentes da utilização do computador.

Na questão 4 da ficha V pedia-se aos alunos que, sem efectuarem cálculos, determinassem a derivada da função $f(x) = x^2 - 2x + 2$ no ponto de abcissa 1. Era dada a representação gráfica da função (figura 8.34).

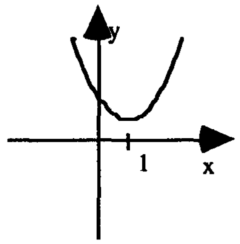


Fig. 8.34 - Gráfico da questão 4 da ficha V.

A Cristiana que, durante esta intervenção didáctica, tinha afirmado, várias vezes, que a derivada de uma função no vértice de uma parábola era zero, como tinha a expressão analítica da função, ligou o computador, introduziu a expressão analítica da função e, através da opção própria do programa, determinou a derivada da função no ponto de abcissa 1. Pareceu-nos, neste caso, estarmos em presença de uma certa dependência do computador.

Em resumo: Alguns alunos manifestaram algumas dificuldades em trabalhar com o computador, uma vez que não tinham tido, até essa altura, qualquer tipo de experiência na sua utilização.

De início, alguns alunos que sempre tinham sido bem sucedidos na disciplina de Matemática, sentiram-se um pouco confusos com este contexto que privilegiava a observação e interpretação gráfica, em detrimento dos cálculos complexos ligados ao estudo das derivadas de funções.

Por vezes, alguns alunos, não conseguiram fazer conexões adequadas entre aquilo que visualizavam no computador para determinarem a derivada de uma função num ponto e a determinação do limite de uma razão incremental.

Algumas situações levaram-nos a admitir que, por vezes, alguns alunos, se sentiram um pouco dependentes da utilização do computador.

8.7. Apreciação da intervenção

A intervenção didáctica que operacionalizou esta experiência de ensino tem por base um modelo de que o estudo dos conceitos de Análise privilegiando uma abordagem gráfica, com recurso a ferramentas computacionais, pode elevar a compreensão desses conceitos. Envolveu alunos de duas turmas de 12º Ano de escolaridade, de uma Escola Secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo de 1994/95. Os conceitos envolvidos no estudo das derivadas foram abordados privilegiando uma abordagem gráfica. As actividades propostas foram desenvolvidas em grupo e em contexto computacional.

A professora da turma considerou que o trabalho desenvolvido tinha sido importante para todos os alunos que nele participaram.

Os alunos mostraram um verdadeiro envolvimento e persistência no desenvolvimento das actividades propostas. Trabalharam bem em grupo, sem ansiedade e medo de errar. A troca de ideias dentro do grupo ajudou a clarificar, interiorizar e aprofundar conceitos. Os alunos, na sua maioria, estabeleceram conexões entre as estratégias analíticas e gráficas de resolver as questões. A sua maioria não manifestou dificuldade em trabalhar com o programa de computador.

Os alunos consideraram importante o trabalho desenvolvido. Todos os alunos sublinharam que a visualização de gráficos de funções e das suas funções derivadas desempenhou um papel primordial na sua compreensão dos conceitos de Análise.

O balanço da intervenção didáctica desenvolvida é considerado francamente positivo quer pelos alunos, quer pela professora quer pela investigadora.

Capítulo 9

Conclusões e implicações

Este estudo valorizou a experimentação e a visualização no processo de ensino e aprendizagem das derivadas, com recurso a ferramentas computacionais e num ambiente em que se privilegiou o trabalho em grupo. Pretendia-se descrever os processos de aprendizagem dos alunos neste contexto. Nos quatro capítulos anteriores foram apresentados e analisados os resultados obtidos ao longo desta investigação. Neste capítulo final recordam-se os objectivos do estudo bem como a metodologia utilizada, apresentam-se as conclusões fundamentais relativamente a cada um dos capítulos anteriores, fazem-se algumas considerações sobre as implicações do estudo levantando-se algumas questões que decorrem dos seus resultados e que podem eventualmente fornecer sugestões para futuras investigações e acrescentam-se umas observações finais.

9.1. Objectivos do estudo e metodologia utilizada

Esta investigação pretendia analisar e compreender os processos de aprendizagem do conceito de derivada em contexto computacional.

Foi feita uma abordagem conceptual usando dois Organizadores Genéricos (uma opção do programa *Drawing chords through a fixed point* que permite visualizar as sucessivas rectas secantes aproximando-se da recta tangente para compreender a derivada de uma função num ponto como um processo limite, e uma opção do programa *Gradient curve* para ligar uma compreensão pontual de derivada a um ponto de vista mais global de derivada como função) do programa de computador *A Graphic Approach to the Calculus*.

Foram levantadas as seguintes questões:

1. Como é que os alunos determinam e utilizam o conceito de declive de uma recta?
2. Como determinam e compreendem o conceito de derivada de uma função num ponto?
3. Como relacionam o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada e vice-versa?
4. De que modo estas aprendizagens são influenciadas pelo contexto computacional escolhido?

Utilizou-se uma metodologia de experiência de ensino, concretizada numa intervenção didáctica que envolveu alguns alunos de duas turmas de 12º ano de escolaridade, em horário extra-lectivo, de uma escola secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo 1994/95. O ensino e aprendizagem das derivadas de funções foi feito privilegiando uma abordagem gráfica e com recurso ao programa de computador*a Graphic Approach to the Calculus*.

Os dados, submetidos à técnica de análise de conteúdo, foram recolhidos através de: (a) episódios de ensino com três pares de alunos; (b) gravações audio e vídeo do trabalho desenvolvido; (c) entrevistas não estruturadas; (d) observação das aulas; (e) inquérito efectuado a todos os alunos, no final do estudo; (f) respostas dadas às questões das fichas de trabalho; (g) respostas dadas a questões dos dois últimos testes de avaliação.

9.2. Conclusões do estudo

De acordo com a revisão de literatura feita, com as questões de investigação e com a análise de dados apresentada nos quatro capítulos anteriores, nesta secção faz-se uma síntese das estratégias de aprendizagem e principais dificuldades evidenciadas pelos alunos na determinação do declive de uma recta, na determinação da derivada da função num ponto, no modo como relacionaram o gráfico de uma função com o gráfico da sua função derivada e vice-versa. Faz-se uma caracterização global das principais estratégias utilizadas pelos alunos e, por último, sintetiza-se a influência de uma abordagem gráfica, em contexto computacional, no ensino e aprendizagem dos conceitos que dizem respeito às derivadas de funções.

9.2.1. Declive de uma recta

O conceito de derivada de uma função num ponto é um conceito complexo, construído sobre outras noções matemáticas. A sua interpretação geométrica, apela à noção de declive da recta tangente à curva representativa da função nesse ponto. Assim, apresentamos algumas conclusões que dizem respeito não só ao modo como os alunos determinaram o declive de uma recta, mas também ao modo como relacionaram esse declive com a monotonia da função e as concepções dos alunos em relação a esse conceito. Por último, apresentamos as principais dificuldades evidenciadas.

9.2.1.1. Determinação do declive de uma recta

Um dos objectivos da experiência de ensino era proporcionar aos alunos a construção do conceito do declive de uma recta. Nesse sentido, foram propostas algumas actividades em que deveriam determinar o declive de algumas rectas exibidas no ecrã do computador e relacionar esses valores com a inclinação das rectas. Não era dada qualquer indicação da expressão analítica das funções representadas.

Os alunos desenvolveram estas actividades sem grandes dificuldades. Os alunos utilizarem estratégias diferentes, ainda que, por vezes, seja difícil estabelecer bem a fronteira entre os tipos de estratégias utilizadas na determinação do declive de uma recta, no modo como relacionaram o declive de uma recta com a sua monotonia e, consequentemente, no modo como definiram declive de uma recta.

Identificámos duas estratégias principais na determinação do declive de uma recta, que denominámos de — estratégia geométrica e estratégia analítica. Alguns alunos evidenciaram estratégias mistas na sua determinação.

Alguns alunos, que optaram por uma estratégia na realização de uma tarefa num determinado contexto, mudaram, por vezes, de estratégia perante um novo contexto.

Estratégia geométrica na determinação do declive de uma recta

A maioria dos alunos utilizou uma estratégia que denominámos de *geométrica* na determinação do declive. Foram considerados nesta categoria os alunos que: (a) falaram de declive como um indicador da inclinação da recta, demonstrando possuir uma imagem gráfica na qual aparece a recta com uma determinada posição em relação aos eixos coordenados; (b) identificaram declive de uma recta com a tangente trigonométrica, evidenciando uma concepção de que o declive é uma característica especial do ângulo que a recta forma com o semi-eixo positivo dos xx; (c) referiram uma relação de dependência entre os incrementos das variáveis. De uma maneira geral, referiram o incremento da variável dependente em função da variável independente "quando x aumenta 1, y aumenta 2", "quando x aumenta 2, y diminui 4". Estes incrementos não foram determinados como se se tratasse de números estáticos resultado de uma operação, mas como comprimentos de segmentos de recta associados a um determinado movimento das variáveis; (d) desenharam um triângulo rectângulo em que os comprimentos dos catetos coincidiam com os valores absolutos dos incrementos das variáveis e determinaram o quociente entre esses valores.

Para determinar o declive das rectas exibidas no ecrã do computador, estes alunos, na sua maioria, escolheram dois pontos pertencentes a essas rectas com coordenadas de fácil leitura (nas primeiras actividades esses pontos eram sugeridos nas fichas), imaginaram um triângulo rectângulo, "contaram" o incremento de y correspondente ao incremento de x (figura 9.1) e determinaram o seu quociente.

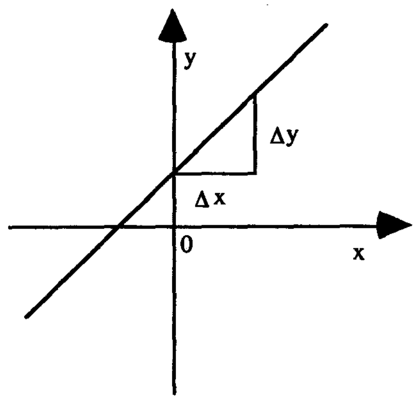


Fig. 9.1 - Esquema que os alunos faziam para determinar o declive da recta

Neste processo, alguns alunos não se sentiram amarrados aos pontos sugeridos na ficha de actividades, ainda que, por vezes, a leitura das coordenadas de outros pontos sobre a recta se tivesse mostrado, um pouco mais complicada. Por exemplo, o Luís Carlos usou durante esta experiência de ensino um método próprio na determinação do declive. Considerou, sistematicamente, o incremento de y correspondente a um incremento unitário de x. Este método embora evidencie, por parte deste aluno, uma boa compreensão funcional da noção de declive de uma recta, tornou-se uma rotina que implicou, por vezes, uma dificuldade adicional de leitura de coordenadas de pontos.

Os alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica no desenvolvimento das tarefas demonstraram possuir uma componente visual bem desenvolvida. Utilizaram os gráficos como o contexto privilegiado de resolução das questões e como argumentação e, além disso, fizeram-no de uma forma dinâmica. A sua terminologia estava imbuída de movimento " o y andou...", "a recta vem...", "diminui", "aumenta", reforçada por um modo de expressão gestual. Os seus apoios foram gráficos, diagramas, contagens e gestos. De uma maneira geral, não partiram das regras, construíram-nas e utilizaram-nas como recurso ou como argumentação. Desenvolveram as actividades sem necessidade de recordar ou identificar uma fórmula, esforçando-se por visualizar relações matemáticas. Construíram conexões viáveis entre os gráficos das rectas e os seus declives. De uma maneira geral, mostraram-se arrojados no desenvolvimento das actividades propostas.

Em relação à determinação do declive de rectas paralelas ao eixo dos xx, estes alunos mostraram ter recorrido à imagem de uma recta horizontal para afirmarem que o seu declive era zero, por ser nulo o incremento de y.

O declive de rectas paralelas ao eixo dos yy, causou uma certa perturbação a alguns alunos que manifestaram uma certa dificuldade em falar de declives infinitos.

Parece-nos possível concluir que a determinação do declive de uma recta a partir da sua representação gráfica tem o potencial de produzir uma compreensão mais elevada daquela que é alcançada apenas por estudos analíticos e procedimentais.

Estratégia analítica na determinação do declive de uma recta

A Cristiana, uma aluna que ao longo desta experiência de ensino privilegiou uma estratégia analítica no desenvolvimento das actividades, parece ter adquirido uma compreensão do declive de uma recta baseada na memorização de regras a partir de representações analíticas. As suas traduções frequentes da representação gráfica para a representação analítica sugerem que esta aluna se sentia mais confortável com símbolos algébricos do que com gráficos. Para determinar o declive de uma recta: (a) recorreu à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ou enunciou a regra "final menos inicial a dividir por...", sem relacionar esses procedimentos com qualquer tipo de imagem gráfica; (b) Referiu-se ao declive como um número, um coeficiente numérico dentro de uma expressão analítica, o que supõe um esquema conceptual algorítmico, no sentido em que não explica o que é o declive mas como se obtém a partir de uma equação ou a partir da aplicação de uma fórmula, ou seja, resultado dos procedimentos que utiliza para o reconhecer; (c) os gráficos desempenharam um papel secundário no desenvolvimento das actividades. A Cristiana, dos gráficos passava rapidamente para as regras "tangente de 45° é igual a 1", ou seja, recorria a propriedades algébricas ou numéricas, e utilizava-as de uma forma estática. Esta aluna parecia considerar a estratégia geométrica inferior à analítica. Isto pode ser devido, em parte, aos Cursos de Geometria onde "ver" não é sinónimo de "provar". A abordagem analítica parecia dar-lhe mais segurança. Preocupava-se com o rigor e com a precisão, e era prudente nos processos de resolução das questões. Revelava algumas dificuldades em trabalhar com os gráficos, embora, uma vez ou outra, por sugestão de outro colega de grupo, tenha calculado o declive da recta, através da observação gráfica.

Esta aluna demonstrou ter conhecimento dos conceitos e competências básicas relacionadas com o declive de uma recta mas parecia não compreender muitas das estruturas fundamentais desses conceitos. Ficou-nos a impressão de que recorria à memorização de factos, regras e procedimentos que acreditava representarem a essência da Matemática. Manifestou algumas limitações na capacidade de relacionar conceitos em contexto gráfico. Afirmava a Cristiana: "em relação ao declive, eu sabia que na recta $y = 4x+2$, o declive era 4, mas não percebia que isso ia ter influência na inclinação da recta". Esta aluna, por exemplo, falava em delta x como sendo o "final menos o inicial", e associava-lhe um número, sem qualquer ligação com o comprimento de um segmento de recta. Não lhe atribuía qualquer significado gráfico, nem conseguia determinar o seu valor por observação gráfica. Contudo, no decurso desta experiência de ensino, esta aluna foi construindo significado para o declive de uma recta através das representações gráficas que não estavam desenvolvidas através de estudos apenas analíticos e procedimentais de anos anteriores.

O esquema conceptual desta aluna tem uma faceta analítica, que carece de imagem gráfica. Estes dados vão ao encontro das conclusões do estudo levado a cabo por Giménez (1990) e do estudo de Eisenberg e Dreyfus (1991) que afirmam que muitos alunos escolhem um quadro de referência teórico em oposição a um quadro de referência visual para processar informação matemática. De acordo com estes investigadores, parece existir da parte de muitos alunos a percepção de que a Matemática escolar requer uma apresentação sequencial e algorítmica mais do que um conjunto de representações visuais. Dreyfus (1990, p. 125) resumiu os resultados da sua investigação sobre a aprendizagem da Análise dizendo: "Os alunos aprendem os procedimentos de Análise a um nível puramente algorítmico que é construído sobre conceitos imagens muito pobres e a visualização é rara, e se ocorre, a ligação cognitiva entre as representações visual/gráfica e analítica/algébrica levanta muitas dificuldades".

O estudo analítico no qual os alunos calculam simplesmente declives a partir de representações analíticas não fornecem um contexto rico de aprendizagem. A aprendizagem dos alunos baseada na adesão a regras e procedimentos nem sempre produzirão a compreensão que alguns professores pretendem dos seus alunos. Se forem dadas aos alunos oportunidades para construírem conexões viáveis entre as representações gráficas e analíticas de funções as suas dificuldades cognitivas podem não ser tão grandes.

Estratégias mistas na determinação do declive de uma recta

Alguns alunos utilizaram simultaneamente estratégias geométricas e analíticas na determinação do declive de uma recta e que, neste estudo denominámos de estratégias mistas. Estes alunos mostraram possuir um equilíbrio entre as componentes visuais e analíticas. Conseguiram sintetizar informação gráfica e analítica para desenvolver algumas actividades. Assim, para determinarem o declive de uma recta, por um lado referiram que o declive era o seno sobre o coseno, que era a tangente [trigonométrica], por outro lado, falaram de quociente entre os incrementos das variáveis e, por vezes, recorreram à fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Por vezes, o mesmo aluno, em contextos diferentes, usou estratégias diferentes para determinar o declive. Alguns alunos que optaram por uma determinada estratégia no desenvolvimento de determinadas actividades, mudaram de estratégia quando lhes pareceu que essa mudança lhes poderia facilitar a tarefa, demonstrando assim tratar-se de alunos versáteis. Outros alunos, por vezes, resolveram algumas actividades utilizando estratégias geométricas mas sentiram necessidade de recorrer a uma estratégia analítica, algumas das vezes para convencer o colega. Isto leva-nos a pensar que, para estes alunos, era mais difícil argumentar a partir de considerações gráficas.

Não queremos deixar de sublinhar que, estes alunos, embora privilegiassem a utilização de uma estratégia geométrica no desenvolvimento das actividades, sabiam as fórmulas a que podiam recorrer se necessário.

9.2.1.2 Relação entre o declive de uma recta e a monotonia da função

Vejamos como é que os alunos relacionaram o declive de uma recta com a monotonia da função, à luz das estratégias utilizadas na determinação do declive.

Os alunos que privilegiaram estratégias geométricas, de uma maneira geral, não manifestaram dificuldades na atribuição do sinal ao declive da recta. Em relação às funções monótonas crescentes afirmavam "quando x anda ... unidades, y aumenta..." o que implicava um sinal positivo para o declive. Em relação às funções monótonas decrescentes verbalizavam: "para um acréscimo de uma unidade nos xx, quanto é que o y decresce?", atribuindo, por isso, sinal negativo ao declive.

Outros alunos, traçavam um triângulo rectângulo, determinavam o comprimento dos catetos, calculavam o seu quociente e atribuíam-lhe o sinal tendo em atenção a monotonia da função. Não se preocupavam com "pontos iniciais" e "pontos finais". Tinham uma boa compreensão geométrica do conceito e confiavam na sua capacidade de relacionar situações.

A utilização de uma estratégia geométrica na determinação do declive de uma recta parece ter ajudado os alunos a fazer conexões imediatas entre o declive e a monotonia da função.

Dos cinco alunos que privilegiaram uma estratégia geométrica, na determinação do declive, apenas um, se esqueceu, por vezes, do sinal menos quando se tratava de uma função monótona decrescente. Este aluno, para determinar o declive desenhava um triângulo rectângulo e determinava o quociente entre os comprimentos dos seus catetos sem, de início, dar grande atenção ao facto do incremento de y ser negativo.

A Cristiana, uma aluna que privilegiou estratégias analíticas na determinação do declive, por vezes, por uma aplicação incorrecta da fórmula, atribuiu sinal positivo ao declive de uma recta que representava uma função monótona decrescente, ainda que verbalizasse que essas funções tinham declive negativo, manifestando, deste modo, não estabelecer as conexões necessárias entre as duas noções matemáticas.

Os alunos que privilegiaram estratégias geométricas na determinação do declive não se preocupavam com as fórmulas. Determinavam, no gráfico, o valor dos incrementos das variáveis (contando, por vezes, quadrículas) e, no final, reparavam se deviam ou não colocar o sinal menos, conforme se tratasse de uma função decrescente ou de uma função crescente. A Cristiana não aceitava este tipo de resolução. A fórmula, desde que bem aplicada, deveria dar o declive com o sinal adequado, sem se preocupar com o tipo de inclinação da recta. Esta aluna que confiava na sua memória para recordar fórmulas, receava esquecer-se de relacionar a monotonia de uma função com o sinal do declive da recta, perante uma situação apresentada na forma gráfica. Este resultado é coincidente com o estudo levado a cabo por Orton (1983). Numa tarefa em que se pedia a taxa de variação entre dois pontos de uma função monótona decrescente nesse intervalo, 25% dos alunos de Orton omitiram o sinal menos.

Parece-nos importante sublinhar uma vez mais a necessidade de ajudar os alunos a estabelecer conexões adequadas entre as representações gráficas e analíticas dos conceitos.

9.2.1.3. Conceito de declive de uma recta

Para além de procurar os processos utilizados pelos alunos na determinação do declive de uma recta a partir da sua representação gráfica, queriamos também compreender qual o conceito de declive construído pelos alunos. Perante a necessidade de explicarem do que é que dependia o declive de uma recta, todos os alunos referiram que dependia da inclinação da recta. Trata-se de uma resposta espontânea em que os alunos recorrem a uma palavra mais próxima da linguagem quotidiana. Analisando mais pormenorizadamente as respostas dadas pelos alunos, concluímos que o seu conceito de declive estava directamente ligado às estratégias utilizadas na sua determinação e que designámos por conceito geométrico e por conceito analítico.

Conceito geométrico

Os alunos que construíram um conceito geométrico de declive, nas suas respostas, utilizaram elementos próprios da linguagem geométrica e sugeriram um esquema conceptual com imagens gráficas conceito. Associaram à palavra declive a imagem gráfica de uma recta num sistema de eixos cartesianos com uma certa posição caracterizada, na maioria dos casos, por um ângulo.

Entre os alunos que demonstraram possuir um conceito geométrico de declive, podemos distinguir três categorias diferentes: (a) alunos que definiram declive de uma recta como sinónimo de inclinação da recta, o que, à partida, poderia sugerir um esquema conceptual incompleto. No entanto, perante a necessidade de explicitar inclinação em relação a quê, todos os alunos referiram tratar-se da inclinação da recta em relação ao eixo dos xx.; (b) alunos que na definição de declive utilizaram a palavra tangente no sentido trigonométrico; (c) alunos que na definição de declive incluíram uma relação de dependência entre os incrementos das variáveis o que sugere, por parte destes alunos, uma imagem dos incrementos e a sua relação constante.

Conceito analítico

A Cristiana demonstrou, nas suas afirmações, ter construído um conceito analítico de declive de uma recta, associando-lhe o parâmetro **m** da expressão y = mx + b. Esta aluna que definiu declive como um número, na realidade, o que fez foi explicar os procedimentos que utilizava para o reconhecer. É uma resposta que supõe um esquema conceptual de tipo algorítmico, no sentido em que não explica o que é o declive mas como se obtém a partir de uma expressão analítica e, neste caso, sem qualquer significado gráfico. Esta aluna sabia de cor a definição de declive, o que não garantia a sua compreensão do conceito. O conceito de declive de uma recta parecia ter-lhe sido introduzido por meio de uma definição sem qualquer esquema visual — o coeficiente de x da equação y = mx + b.

Perante uma experiência de ensino que privilegiou uma abordagem gráfica dos conceitos, com o apoio do computador, na Cristiana parece ter prevalecido uma definição analítica do conceito construída anteriormente. Manifestou uma certa dificuldade em construir uma noção geométrica do conceito. As suas respostas não eram apoiadas por qualquer representação gráfica.O esquema conceptual desta aluna continuou a ter uma faceta analítica desligada da noção geométrica do conceito.

Uma experiência de ensino que privilegiou a exploração gráfica do conceito de declive implicou que a maioria dos alunos tivesse construído uma noção geométrica do conceito. Estes alunos construíram ou um conceito de declive que corresponde ao aspecto mais intuitivo e mais próximo da linguagem do dia-a-dia (inclinação da recta em relação ao semi-eixo positivo dos xx), ou um conceito mais complexo e menos intuitivo da variação da função (quociente entre os incrementos das variáveis). Contudo, uma aluna submetida à mesma experiência referiu aspectos analíticos do conceito. Para esta aluna foi difícil estabelecer conexões entre o conceito de declive de uma recta interpretado graficamente, com experiências anteriores desse conceito que correspondem ao aspecto mais escolar em que se calcula o declive a partir de uma equação.

Alguns alunos deram uma definição de declive que contempla aspectos geométricos e analíticos do conceito.

Também Giménez (1992), concluiu que os alunos envolvidos no seu estudo, possuíam esquemas conceptuais diferentes em relação ao declive de uma recta que classificou de perfil "geométrico", perfil "operativo" e de perfil "funcional". O perfil geométrico e perfil funcional caracterizado por Giménez corresponde ao que, no nosso estudo, denonimámos de conceito geométrico. O perfil operativo corresponde ao que designámos de conceito analítico.

9.2.1.4. Dificuldades que se evidenciaram

No início deste estudo, os alunos habituados, de anos anteriores, à resolução analítica das questões, evidenciaram algumas dificuldades na determinação do declive de uma recta num contexto gráfico. Salientam-se algumas dessas dificuldades.

Para alguns alunos, não foi fácil a tarefa de determinar, a partir do gráfico, o incremento das variáveis. Escreviam a fórmula (f(b)-f(a))/(b-a) mas, como determinar f(b) e f(a) sem a expressão analítica da função?

Sabiam que era necessário efectuar um quociente entre incrementos mas, por vezes, inverteram os termos da fracção e determinaram o quociente entre o incremento de x e o incremento de y. Outros alunos determinaram o quociente entre a abcissa de um dos pontos e a ordenada do outro.

Como já foi referido, quando uma função era monótona decrescente, alguns alunos omitiram o sinal menos, evidenciando deste modo, não relacionarem o sinal do declive da recta com o aspecto do gráfico, ainda que, alguns desses alunos verbalizassem que o sinal do declive de uma recta dependia da monotonia da função que a recta representava.

Estas dificuldades foram igualmente identificadas nas investigações de Orton (1983), de Giménez (1990) e de Tall (1985a, 1985b, 1985c, 1986). No estudo de Giménez, muitos alunos determinaram o declive de uma recta identificando o coeficiente que consideravam representar o declive, depois de escrever a sua representação analítica. Assim, começavam por determinar o declive da recta mas não o identificavam como tal enquanto não tinham escrito a expressão analítica completa da função. Não identificámos esta estratégia em nenhum dos alunos do nosso estudo.

O cálculo do declive de rectas paralelas ao eixo dos yy causou alguma perturbação a todos os alunos que manifestaram, durante esta experiência de ensino, uma certa dificuldade em falarem de declives infinitos.

Os professores não podem assumir que os alunos chegam ao estudo da Análise com uma forte compreensão dos conceitos que lhe estão subjacentes. Devem assumir que a aprendizagem desses conceitos é feita em espiral, cabendo-lhes a responsabilidade de desenvolverem e aprofundarem a compreensão que os alunos têm desses conceitos.

O estudo analítico no qual os alunos calculam declives a partir de representações analíticas não pode fornecer um contexto rico de aprendizagem. A aprendizagem baseada na adesão a regras e procedimentos nem sempre produzirá o conhecimento que alguns professores pretendem que os seus alunos construam.

Parece importante sublinhar que a abordagem do conceito de declive de uma recta deve relacionar aspectos gráficos e analíticos, de forma a permitir que os alunos construam imagens que facilitem e aumentem a sua compreensão do conceito. O nosso estudo mostrou-nos, por exemplo, que a Cristiana, uma aluna que, de uma maneira geral, tinha sucesso na utilização de fórmulas, manifestava muitas dificuldades com a interpretação de gráficos. Sabia a fórmula, aplicava-a bem em contexto analítico, mas não tinha o mesmo sucesso em contexto gráfico. Por outro lado, o Paulo, um aluno que privilegiava estratégias geométricas de resolução das questões, por vezes, quando precisava de recorrer à Álgebra, não tinha sucesso, não sabia as fórmulas. Assim, podemos concluir que uma estratégia não supera a outra, são estratégias complementares.

É importante o trabalho com gráficos, se possível representando situações da vida real, antes de uma abordagem analítica dos conceitos.

9.2.2. Derivada de uma função num ponto

Ao longo deste estudo privilegiou-se a determinação da derivada de uma função num ponto a partir da representação gráfica de funções exibidas no ecrã do computador. O programa *A Graphic Approach to the Calculus*, permitiu que as rectas secantes fossem visualizadas movendo-se de uma forma dinâmica até à posição que parecia indistinguível da recta tangente, enquanto que o valor numérico dos respectivos declives se ia aproximando de um valor fixo, a derivada da função no ponto. Permitiu, assim, que o processo limite fosse visualizado de uma forma dinâmica, ligando a figura geométrica da derivada ao processo numérico.

De início, a determinação da derivada de uma função num ponto, com recurso ao computador, fascinou os alunos. Desenvolviam as tarefas relativamente depressa, não dispendendo tempo suficiente para grandes reflexões sobre o que estava a acontecer no ecrã do computador. Estes alunos precisaram de orientação e apoio da professora ou da investigadora para reflectirem sobre as relações entre o que era exibido no ecrã do computador e o processo analítico correspondente. Alguns alunos só compreenderam o processo utilizado pelo computador quando sentiram necessidade de aplicar um processo semelhante em actividades posteriores, na determinação gráfica da derivada da função em determinados pontos críticos, sem recurso a ferramentas computacionais.

9.2.2.1 Determinação da derivada de uma função num ponto

Tal como aconteceu na determinação do declive de uma recta, os alunos utilizaram estratégias diversificadas para determinarem a derivada de uma função num ponto, que denominámos de estratégia geométrica e de estratégia analítica. Na resolução de algumas questões, alguns alunos, utilizaram os dois tipos de estratégias e que, neste estudo, temos denominado de estratégias mistas.

Estratégia geométrica

Todos os alunos envolvidos nesta experiência de ensino utilizaram uma estratégia geométrica para determinar a derivada de uma função num ponto. Assim, começaram por associar derivada da função ao declive da recta tangente à curva nesse ponto. Traçaram essa recta e determinaram o seu declive. Nas actividades em que era dada a expressão analítica da função, alguns alunos utilizaram o computador para obter o valor da derivada ou para verificar valores que tinham determinado mas que lhes ofereciam algumas dúvidas. A Cristiana, uma aluna que durante esta experiência de ensino se destacou na preferência por estratégias de resolução analíticas, por vezes, fez algum esforço para acompanhar as estratégias geométricas utilizadas pelos colegas ou sugeridas pelas próprias actividades.

Nas actividades em que se pedia aos alunos que indicassem o valor da derivada de uma função em determinados pontos, a partir da observação do gráfico da sua função derivada, todos os alunos acabaram por utilizar uma estratégia de "ler" a ordenada dos pontos no gráfico da função derivada, manifestando, deste modo uma concepção de função derivada como um objecto (concepção estrutural, de acordo com Sfard (1992)). Alguns alunos, por vezes, depararam-se com dificuldades (originadas pela escala proporcionada pelo *software*) ao efectuar essas leituras mas, confiantes na sua estratégia de resolução, optaram por recorrer, por iniciativa própria, a valores aproximados. Outros alunos sentiram-se pouco confortáveis com as leituras feitas e recorreram a outra opção do programa para determinar, com exactidão, a derivada da função nesses pontos. De referir ainda que alguns dos alunos evocaram as simetrias do gráfico da função derivada, o que lhes evitou fazer algumas leituras.

Estratégia analítica

Como já referimos, todos alunos que participaram nesta experiência de ensino, com mais ou menos ênfase, acabaram por utilizar uma estratégia geométrica na determinação da derivada de uma função num ponto. Aliás, os gráficos desempenhavam um papel principal em todas as actividades propostas, pelo que, mesmo aqueles alunos que privilegiavam estratégias analíticas, aderiram, uma vez ou outra, a esse tipo de estratégia.

A Cristiana, para determinar a derivada de uma função num ponto, viu-se, por vezes, confrontada com as seguintes tarefas: descobrir a expressão analítica da função (nos casos em que esta não lhe era dada); derivar essa expressão, através das regras de derivação; substituir, na expressão analítica da função derivada, a abcissa do ponto em que pretendia determinar a derivada. Esta aluna mostrava pouca confiança nos métodos visuais de resolver as questões, mesmo quando esses métodos tornavam a solução mais fácil. Preferia memorizar fórmulas e técnicas algébricas. A visualização parecia ser considerada como um método inseguro de prova e via os gráficos como uma representação de importância secundária. Estas afirmações são consistentes com as conclusões da investigação de Eisenberg e Dreyfus (1992).

A Cristiana estava pouco habituada, de anos anteriores, a resolver questões a partir dos gráficos. No entanto, ao longo deste estudo, verificámos que fez algum esforço para aderir ao estudo das derivadas a partir dos gráficos.

Estratégias mistas

Algumas das actividades em que se pedia aos alunos que determinassem a derivada de algumas funções em determinados pontos, a partir do gráfico da sua função derivada, fomentaram nos alunos a utilização de estratégias mistas. Como já foi referido, algumas dessas actividades envolviam funções de fácil derivação a partir das regras e, além disso, a leitura de valores no gráfico da função derivada nem sempre se manifestou imediata, devido à escala proporcionada pelo *software*. Assim, embora os alunos tenham iniciado o desenvolvimento dessas actividades utilizando uma estratégia geométrica, a determinado momento, utilizaram uma estratégia analítica, por sentirem que esta lhes poderia facilitar a tarefa. Estes alunos conseguiram sintetizar informação gráfica e analítica. Demonstraram flexibilidade na exploração de ideias matemáticas e na experimentação de métodos alternativos de resolução de questões. Esta flexibilidade pode ser consequência de um ensino que os encorajou a explorar, formular e testar conjecturas, e discutir os resultados das suas investigações. Perante a utilização de uma estratégia que não estava a resultar muito bem, não desistiram, tentaram uma estratégia diferente, evidenciado interesse e criatividade para fazer matemática. Estes alunos conseguiram trabalhar com a noção de derivada em vários contextos demonstrando uma compreensão ampla do seu significado. Perceberam que estratégias alternativas podiam responder melhor a uma dada situação. Os próprios alunos avaliaram essas estratégias com base na sua eficácia. Estes alunos que conseguiram aplicar e fazer a tradução entre representações diferentes da mesma situação ou do mesmo conceito matemático terão, à partida, um conjunto de ferramentas poderosas e flexíveis e uma compreensão mais profunda da consistência e beleza da Matemática.

9.2.2.2 Conceito de derivada de uma função num ponto

No final desta experiência de ensino, pedimos aos alunos a definição de derivada de uma função num ponto. Todos os alunos verbalizaram um conceito adequado de derivada ainda que, por vezes, tenham manifestado algumas dificuldades em exprimir convenientemente o conceito.

Tal como aconteceu na determinação da derivada de uma função num ponto e, de certa forma, em coerência com as estratégias então utilizadas, alguns alunos verbalizaram o conceito de derivada sugerindo um esquema conceptual com imagens gráficas do conceito.

Conceito geométrico

Estes alunos associaram à palavra derivada o declive da recta tangente ao gráfico da função no ponto, demonstrando possuir um conceito imagem adequado de derivada. O seu conceito definição era uma verbalização baseada nesse conceito imagem. Estes alunos, não sentiram necessidade de recordar qualquer tipo de definição formal do conceito. Alguns alunos espelharam na sua definição, um conceito de derivada muito próximo daquilo que tinha visualizado no ecrã do computador — as várias rectas secantes movendo-se até à posição limite de recta tangente, enquanto que o valor numérico dos respectivos declives se ia aproximando de um valor fixo, a derivada da função no ponto.

Conceito analítico

Embora as actividades propostas ao longo desta experiência de ensino tivessem privilegiado uma interpretação gráfica da derivada, a Cristiana manifestou algumas dificuldades em se libertar de um pensamento analítico. Falou de regras de derivação "nesse ponto, pode fazer uma curva... é zero... pode ser uma recta... é o ângulo que faz... lembro-me daquelas regras de derivar...". Para esta aluna a imagem de derivada estava fortemente ligada às regras de diferenciação. Referiu qual a derivada de uma função em determinados pontos "típicos" e falou em regras. O conceito de derivada parecia estar, de certo modo, divorciado da sua interpretação geométrica. Todas as frases que esta aluna utilizou para definir o conceito de derivada não estavam fora do contexto, no entanto, pareciam estar em compartimentos estanques sem um elemento adequado que fizesse a sua ligação. Conhecia as regras e fórmulas que diziam respeito às derivadas e, em determinados contextos, sabia como aplicá-las mas, mostrou dificuldade em arquitectar uma definição geral de derivada. Estes dados são consistentes com as conclusões do estudo de Fiske (1994).

Conceito misto

Alguns alunos, para se referirem ao conceito de derivada de uma função num ponto, estabeleceram conexões geométricas e analíticas do conceito, ou seja, construíram um conceito geométrico de derivada de uma função num ponto em harmonia com a sua definição formal — limite de uma razão incremental.

9.2.2.3. Tangentes e secantes

Quando as ideias são apresentadas num contexto restrito, o conceito imagem pode incluir características que são verdade nesse contexto, mas não em geral. Experiências anteriores da tangente a uma circunferência introduziram nos alunos uma crença de que a tangente é uma recta que toca o gráfico num ponto e não o atravessa. Esta concepção causou conflitos cognitivos quando foram considerados outros casos como, por exemplo, a tangente num ponto de inflexão, onde a recta atravessa a curva, o caso da tangente num "bico" e ainda nos pontos em que muda a expressão analítica da função. Os alunos têm, por um lado, uma definição formal de recta tangente a um gráfico de uma função diferenciável e, por outro lado, um conceito próprio que não se articula bem com essa definição. Este conceito próprio pode ter originado que alguns alunos, por vezes, respondessem a algumas questões traçando uma recta que não era tangente no ponto. Assim, por exemplo, quando num dado intervalo do domínio da função, esta era definida por uma recta, alguns alunos traçavam a recta tangente em qualquer ponto desse intervalo um pouco ao lado da recta que representava a função, em vez de se lhe sobrepôr. Esta mesma concepção foi observada nos estudos de Vinner (1983) e de Tall (1986).

Mesmo depois de terem explorado o conceito de derivada, no qual o conceito de tangente desempenha um papel essencial, alguns alunos não desenvolveram uma compreensão da tangente em termos da Análise. Era muito forte para os alunos a imagem de tangente da

Geometria Euclideana. Por isso, o estudo das tangentes na Análise parece não ter alterado esta imagem.

9.2.2.4 Dificuldades que se evidenciaram

Os alunos depararam-se com algumas dificuldades na determinação da derivada da função em pontos críticos (pontos de descontinuidade, "bicos"). Queremos, no entanto, sublinhar que o pouco sucesso manifestado pelos alunos na determinação da derivada de uma função em pontos críticos não implica, por parte de alguns alunos, uma má compreensão da interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto. A maior parte das vezes, as dificuldades dos alunos prenderam-se com um traçado incorrecto das rectas secantes: o ponto fixo nem sempre era o ponto em que se pedia para determinar a derivada; o ponto móvel, por vezes, não se deslocava sobre a curva, "navegava" sobre o plano; o ponto móvel nem sempre se aproximava do ponto fixo.

Parece-nos possível adiantar algumas justificações para as dificuldades manifestadas pelos alunos no traçado das secantes ao determinar a derivada de uma função em pontos de descontinuidade.

O *software* que estava a ser utilizado nestas aulas não permitia visualizar a maior parte dos gráficos de funções definidas por ramos. Assim, só lhes foi possível visualizar, com recurso a ferramentas computacionais, o traçado das rectas tangentes como processo limite do traçado de rectas secantes quando as funções eram definidas, analiticamente, por uma expressão designatória em todo o seu domínio ou, no caso desta não estar definida num determinado ponto era permitido, pelo programa, dar um valor para a função nesse ponto. Ficou-nos a ideia de que, quando os alunos visualizavam este processo dinâmico, aguardavam, com expectativa, que o valor do declive exibido na tabela de valores que aparecia ao lado do gráfico, começasse a ter um valor constante, para então responderem à questão que lhes era colocada, desligando do processo utilizado para a determinação desse valor: qual o ponto fixo que estava a ser considerado; como é que o ponto móvel deslizava sobre a curva representativa da função e o movimento do ponto móvel, que se aproximava do ponto fixo. Deste modo, os alunos, perante a tarefa de determinarem, graficamente, derivadas em pontos de descontinuidade de funções que não podiam introduzir no computador, viram-se confrontados com o tipo de dificuldades assinaladas.

Todos os alunos manifestaram algumas dificuldades em interpretar como é que as rectas secantes "deslizando" ao longo de uma curva conduziam, no seu limite, à recta tangente e a sua ligação com a noção de derivada da função no ponto. Estes dados são consistentes com as conclusões do estudo de Orton (1983). A imagem visual da recta secante aproximando-se da recta tangente pode não ser intuitiva para os alunos.

Outra dificuldade surgiu na determinação da derivada em pontos de descontinuidade da função. Uma resposta espontânea, consistiu na afirmação de que a função não tinha derivada nesses pontos, por não ser contínua. Para justificarem esta afirmação, todos os alunos "recitaram" bem o teorema: "toda a função com **derivada finita** num ponto é contínua nesse ponto" e acrescentaram ainda: "então, se a função não é contínua no ponto, não pode ter **derivada** nesse ponto" (não se referiam, neste caso, a derivada finita). A palavra finita que figurava no enunciado do teorema não parecia ser significativa, nem ter qualquer tipo de influência na resolução das questões, embora nenhum dos alunos a tivesse suprimido quando recorria a uma justificação enunciando o já referido teorema.

Sempre que as rectas secantes conduziam, no seu limite, a uma recta vertical, os alunos manifestaram uma certa dificuldade em determinar se as derivadas laterais eram $+\infty$ ou $-\infty$. Podemos estar perante um conflito com uma experiência de anos anteriores em que os alunos aprenderam que a tangente trigonométrica de $\pi/2$ não estava definida. Aquando do estudo da trigonometria, o problema é ultrapassado afirmando que a tangente trigonométrica de $\pi/2$ não está definida, sem qualquer explicação complementar. Mais tarde, levantam-se questões no estudo de limites infinitos. No processo de ensino/aprendizagem deveria ser dada mais atenção ao modo como são abordados tópicos que é preciso desenvolver posteriormente. Não seria de aproveitar o estudo da tangente trigonométrica para clarificar junto dos alunos o conceito de infinito? Estes tópicos têm sido dados um pouco separadamente o que, por vezes, origina alguns conflitos cognitivos. A ultrapassagem destas dificuldades requer que o professor aborde explicitamente os tópicos de uma forma paralela e por um largo período de tempo. No nosso estudo pareceu-nos que o tempo foi relativamente curto para que os alunos pudessem construir e assimilar tantas noções envolvidas, todas elas com um certo grau de complexidade.

Existiu, da nossa parte, uma preocupação exagerada com as derivadas laterais da função em pontos de descontinuidade. Essa preocupação só pode ser explicada pelo facto de se tratar de uma experiência que envolvia alunos do 12º ano que, em breve, seriam sujeitos às Prova de Aferição e Específica, que podiam contemplar actividades desse tipo.

Os "bicos" foram considerados, por alguns alunos, como pontos em que não existia derivada, por serem diferentes as suas derivadas laterais. Surgiram, no entanto, algumas respostas e justificações pouco claras no cálculo da derivada da função nesses pontos. Alguns alunos consideraram que o seu valor era zero. Esta concepção pode ser alvo de duas interpretações: (a) o facto de alguns alunos terem considerado esses pontos como se se tratasse de vértices de parábolas; (b) o facto de alguns alunos traçarem, nesses pontos, rectas tangentes horizontais, de acordo com o seu conceito imagem de recta tangente a uma curva num ponto, construído a partir de experiências anteriores, como sendo a recta que encontra a curva apenas nesse ponto, sem a "atravessar". Esse conceito pode ter levado os alunos a traçar, nesse ponto, uma recta que não era tangente à curva no ponto mas que tinha apenas um ponto em comum com a curva.

Alguns alunos, por vezes, não sabiam como indicar no gráfico da função derivada o facto de não existir derivada da função num determinado ponto. Exigiam a continuidade da função derivada de uma função contínua. Esta concepção de unir com rectas verticais dois pontos no gráfico da função derivada, para dar ideia da continuidade da função, também foi encontrada nos alunos envolvidos nas investigações de Scher (1993) e de Vinner e Dreyfus (1989). Nemirovsky e Rubin (1992) sublinharam também a tendência manifestada pelos alunos para traçar o gráfico da função derivada semelhante ao gráfico da função, tentando preservar as características geométricas da função quando traçavam o gráfico da sua função derivada.

9.2.3. Função derivada

Ao longo deste estudo observámos que os alunos embora não estivessem muito habituados de anos anteriores a resolver questões baseados exclusivamente em representações gráficas, a sua maioria aderiu com entusiasmo a um método de trabalho baseado fundamentalmente nas representações e interpretações gráficas de funções.

As diferentes estratégias que os alunos utilizaram na determinação do declive de uma recta e na determinação da derivada de uma função num ponto implicaram também estratégias diversificadas na representação gráfica da função derivada de uma função apresentada na sua forma gráfica. Assim, continuámos a identificar o mesmo tipo de estratégias já referidas— estratégia geométrica, estratégia analítica e estratégias mistas.

Os alunos que utilizaram uma estratégia geométrica na representação gráfica da função derivada, obtiveram informação sobre a função derivada de uma função representada graficamente, sem necessidade de recorrer à expressão analítica da função. Estabeleceram conexões imediatas entre derivada de uma função num ponto e declive da recta tangente à curva nesse ponto.

A Cristiana, continuou a privilegiar uma estratégia analítica perante a tarefa de representar, graficamente, a função derivada de uma função apresentada na sua forma gráfica. Assim, esta aluna começou por fazer a tradução gráfico—>expressão analítica para, em seguida aplicar regras de derivação e obter a expressão analítica da função derivada. O conhecimento e verbalização de uma regra de derivação não implicava, para esta aluna, qualquer imagem gráfica da função derivada. Por exemplo, para esta aluna, a derivada de uma função constante reduzia-se a um ponto, o ponto de coordenadas (0, 0). O gráfico da derivada de uma função afim coincidia com o gráfico da própria função ainda que verbalizasse que a derivada desse tipo de funções era constante. Esta aluna sabia que o parâmetro **m** da expressão $y = mx + b$ representava o declive da recta mas, esse conhecimento, não implicava a imagem de uma recta paralela ao eixo dos xx, de equação $y = m$. A dificuldade que esta aluna manifestou com a função constante vem corroborar os resultados de outras investigações, já referidas na revisão de literatura. Alguns alunos pareciam não aceitar a função constante como uma função, e falavam de função constante como se se tratasse de uma função linear, uma função com derivada constante, uma função que variava sempre com a mesma rapidez. Scher (1993) concluiu que os alunos envolvidos no seu estudo que não traçaram rectas horizontais no gráfico da função derivada num intervalo em que a derivada era constante podem ter pensado que a derivada era constante. Contudo, o modo com representaram um declive constante foi traçar uma recta com declive constante. Scher acrescentou ainda que o modo como pedimos aos alunos para descreverem declive na Análise pode não ser tão natural como nós pensamos. Fora da Análise, o declive é considerado num intervalo; na Análise, é indicado ponto a ponto.

É interessante verificar que estas actividades foram desenvolvidas pelos alunos de acordo com as suas perspectivas em relação à Matemática. Assim, a Cristiana observava os gráficos como figuras estáticas que lhe permitiam recordar possíveis expressões analíticas de funções. Utilizava regras de derivação, com as quais, de uma maneira geral, tinha sucesso. Os restantes alunos utilizavam o gráfico como local privilegiado para a resolução das questões. A intuição desempenhava um papel importante no desenvolvimento das actividades. Não recorriam, de uma maneira geral, a regras ou fórmulas. Não se preocupavam demasiado com o rigor e precisão da resposta mas sim com um raciocínio correcto. De uma maneira geral, evidenciaram, flexibilidade, interesse e criatividade para fazer matemática. Esta flexibilidade pode ser consequência de um ensino que encoraja os alunos a explorar, formular e testar conjecturas, e discutir os resultados das suas investigações. É preciso sublinhar o papel que as tecnologias gráficas parecem ter desempenhado na facilitação desta diversificação de estratégias.

De início, alguns alunos reagiram manifestando algumas dificuldades nas tarefas em que, dado o gráfico da função derivada se solicitava o gráfico de uma função primitiva. As principais dificuldades manifestadas prenderam-se com o facto de terem usado algumas analogias entre os gráficos da função derivada e o gráfico da função que nem sempre os conduziu a respostas aceitáveis. Alguns alunos pareciam ter uma concepção de que os gráficos deviam ter a mesma forma, ou seja, linhas rectas deviam originar linhas rectas; derivada crescente implicava sempre função crescente e derivada decrescente implicava sempre função decrescente; gráficos acima do eixo dos xx deviam gerar gráficos acima do eixo dos xx e gráficos abaixo do eixo dos xx deviam gerar gráficos abaixo do eixo dos xx; curva com a concavidade voltada para cima implicava função com derivada sempre positiva e curva com a concavidade voltada para baixo implicava função com derivada sempre negativa.

Identificámos as analogias que constam do quadro 9.1.

Quadro 9.1

Analogias entre o gráfico da função e o gráfico de uma das suas funções primitivas

Analogias	**Caracterização**
Replicação	Gráfico da função idêntico ao gráfico da função derivada.
Monotonia	Derivada crescente implicava sempre função crescente e derivada decrescente implicava sempre função decrescente.
Mesma forma	Os gráficos da função e da função derivada deviam ter a mesma forma (por exemplo, linhas rectas deviam corresponder a linhas rectas).
Mesmo sinal	Gráficos acima do eixo dos xx deviam gerar gráficos acima do eixo dos xx e gráficos abaixo do eixo dos xx deviam gerar gráficos abaixo do eixo dos xx.
Concavidade	Curva com a concavidade voltada para cima implicava função com derivada sempre positiva e curva com a concavidade voltada para baixo implicava função com derivada sempre negativa.

As quatro primeiras analogias foram identificadas também no estudo de Nemirovsky e Rubin (1992).

Alguns dos alunos participantes no nosso estudo não recorreram a esse tipo de analogias. Perceberam que o gráfico pedido não tinha que ser idêntico ao gráfico dado e que o ponto a partir do qual se traçava o gráfico não coincidia, obrigatoriamente, com o início do gráfico dado. Dizia o Filipe: "No espaço.... Ele parte do zero, claro que podia partir de outro sítio...".

De uma maneira geral, os alunos que considerámos terem utilizado estratégias geométricas para representar um gráfico plausível de uma função, dado o gráfico da função derivada, mostraram possuir uma boa compreensão do significado gráfico de uma variação constante e de uma variação na variação. Estes alunos sabiam como representar graficamente uma função crescente com uma taxa de variação crescente e uma função decrescente com uma taxa de variação decrescente. Depois de traçarem o gráfico da função, alguns alunos, traçaram nesse gráfico tangentes para se certificarem que o gráfico da função derivada dessa função era o que estava representado na ficha. Todos os alunos se preocuparam em traçar um gráfico da função de modo que não existisse nenhum ponto de variação brusca para assim garantir a continuidade da função derivada.

A Cristiana, uma aluna que ao longo desta experiência de ensino privilegiou estratégias analíticas de resolução das questões continuou a manifestar, nestas actividades essa preferência. Perante o gráfico da função derivada pensou em expressões analíticas de funções do primeiro e do segundo grau para poder afirmar que a sua derivada era, no primeiro caso, uma função representada por uma recta horizontal e, no segundo caso, uma função afim. A Cristiana fez, assim, aquilo que poderíamos designar de uma pré-primitivação.

Repare-se, uma vez mais, nas concepções diferentes que estes alunos parecem ter em relação à Matemática. A Cristiana mostrava-se prudente, não se queria libertar completamente do gráfico da função derivada, os outros alunos mostravam-se mais arrojados. Compreendiam as características do novo gráfico e desprendiam-se do gráfico dado "Até podia começar aqui assim...". A Cristiana falava em expressões analíticas, de certa forma estáticas; os outros alunos utilizavam uma linguagem verbal e gestual a respeito dos gráficos.

A Cristiana, como temos vindo a sublinhar, revelou algumas dificuldades perante a necessidade de pensar em termos gráficos. De qualquer modo, não queremos deixar de referir que as estratégias analíticas que esta aluna utilizava não eram meras recitações de fórmulas e regras. A Cristiana sabia como e onde devia utilizá-las. Contudo, manifestava algumas dificuldades em fazer conexões viáveis entre as múltiplas representações. Ao longo desta experiência de ensino, esta aluna fez um esforço para interpretar e relacionar informação dada na forma gráfica e acabou por ter êxito no desenvolvimento de algumas dessas actividades.

Os alunos não evidenciaram grandes dificuldades no desenvolvimento das actividades que envolviam a escolha de entre várias funções aquela que representava a função derivada de uma função. Para justificar as respostas, relacionaram a monotonia da função com o sinal da função derivada e determinaram a derivada da função em determinados pontos críticos. Estabeleceram conexões dinâmicas entre os gráficos que nos parecem ser uma das consequência de uma experiência de ensino que privilegiou o estudo das derivadas a partir de um ambiente recheado de gráficos. Para estes alunos, os gráficos não eram figuras estáticas, representavam informação que os alunos tratavam de uma forma viva.

9.2.4. Caracterização global das estratégias

Como temos vindo a sublinhar, os alunos utilizaram duas estratégias principais — estratégia geométrica e estratégia analítica. No quadro 9.2 é apresentado um resumo da caracterização global dessas estratégias segundo alguns aspectos pertinentes.

As estratégias mistas abarcam as características da estratégia geométrica e algumas das características da estratégia analítica.

Quadro 9.2 — Caracterização global das estratégias

Aspectos	Estratégia geométrica	Estratégia analítica
Base de exploração	Diagramas, gráficos e gestos.	Factos, regras, fórmulas e teoremas.
Papel dos gráficos	Papel principal. Não eram figuras estáticas. Representavam informação que os alunos tratavam de uma forma viva.	Papel secundário. Traduções frequentes da representação gráfica para a analítica.
Relação com regras matemáticas	Dos gráficos chegavam às regras que serviam de recurso ou de argumentação. Regras no final da acção.	Enunciavam regras sem as relacionar com qualquer imagem gráfica. Regras no início da acção.
Relação com gráficos	Relacionavam bem os conceitos em contexto gráfico. Por vezes, falhavam na verbalização de regras.	Mostravam algumas limitações na capacidade de relacionar conceitos em contexto gráfico.
Tipo de propriedades utilizadas	Geométricas, por exemplo, a simetria. Os gráficos eram o local privilegiado de resolução das questões e serviam de argumentação.	Algébricas, numéricas e trigonométricas, que utilizavam de uma forma estática. Respostas não apoiadas por representações gráficas.
Conceitos matemáticos	Intuitivos, associados a uma interpretação gráfica.	Ligados a regras e divorciados de qualquer interpretação geométrica.
Apresentação dos conceitos	De uma forma dinâmica, com base em imagens gráficas.	De uma forma, estática, sequencial e algorítmica.
Terminologia	Imbuída de movimento.	Estática, composta de fórmulas e regras.
Rigor	Ficavam confortáveis com a utilização de valores aproximados.	Preocupavam-se com o rigor e precisão das respostas.
Desenvoltura	Mostravam-se arrojados no desenvolvimento das actividades.	Eram prudentes no desenvolvimento das actividades.
Aspectos fracos	Dificuldade nas fórmulas e regras.	Conceitos imagens pobres.

Não queremos deixar de sublinhar que uma estratégia não suplanta a outra. Trata-se de estratégias complementares. Os professores devem proporcionar aos alunos oportunidade de estabelecer conexões viáveis entre os dois tipos de estratégias para uma boa compreensão dos conceitos matemáticos.

9.2.5. Actividades desenvolvidas em contextos computacionais

A tecnologia computacional pode agitar os fundamentos não apenas de como ensinamos Matemática mas também de que Matemática ensinamos.

Os alunos são indivíduos activos que constroem, modificam e integram ideias. A aprendizagem da Matemática deve ser também um processo activo. Baseia-se na experiência, e a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer envolvimento do aluno que vai progredindo do concreto para o abstracto.

No que diz respeito ao estudo das derivadas e suas aplicações, pensamos ter sido importante o papel desempenhado pelas ferramentas computacionais. Os alunos construíram os conceitos a partir dos gráficos. Pensamos que esta aprendizagem é muito mais significativa do que aquela que é conseguida apenas por processos centrados em definições e em complexas regras de derivação. O aluno fica liberto para se concentrar no processo matemático que transcende profundamente o domínio do cálculo. Neste contexto o aluno resolve, generaliza, abstrai, conjectura, procura, observa, simplifica, experimenta, deduz ou recorda.

A tecnologia torna possível uma mudança significativa nas prioridades curriculares e nos padrões de organização da sala de aula. A ênfase do currículo muda das competências manipulativas para os conceitos, para as relações, para as estruturas e para a resolução de problemas (Lynch, J. *et al.*, 1989).

Durante a nossa experiência de ensino, o computador revelou-se uma ferramenta importante no desenvolvimento das tarefas propostas e os alunos, de uma maneira geral, tiraram rapidamente partido das suas potencialidades. Revelou-se um instrumento de fácil utilização e de enorme valor pedagógico. Embora, como já referimos, alguns alunos não tivessem feito conexões completas entre a representação gráfica da derivada e a representação simbólica do limite da razão incremental, os alunos beneficiaram do uso de ferramentas computacionais no estudo das derivadas. O uso dos Organizadores Genéricos parece ter facilitado e elevado, em alguns alunos, a ligação entre as múltiplas representações — numérica, geométrica, simbólica e linguística — dos conceitos envolvidos no estudo das derivadas.

Os alunos foram levados a raciocinar em termos simultaneamente gráficos e analíticos, no que diz respeito ao estudo das derivadas, ao contrário do que acontece normalmente no estudo deste tema em que a ênfase é colocada em termos analíticos e no desenvolvimento de complexas regras de derivação.

O trabalho com ferramentas computacionais permitiu um rico e estimulante ambiente de aprendizagem. Eram evidentes, na sala de computadores, os sinais de entusiasmo, debate e deliberação. Um erro não era motivo de embaraço, servia para experimentar de novo, para discutir, para tentar descobrir. Contribuiu, em grande parte, para desenvolver em muitos alunos um espírito de motivação, de persistência e de verdadeira cooperação.

Os computadores permitiram:

- libertar os alunos dos processos de rotina
- ajudar os alunos a desenvolver um raciocínio crítico e criativo.
- novas estratégias de abordagem dos conceitos ligados ao estudo das derivadas através de um reforço da representação gráfica e numérica
- desenvolver nos alunos atitudes positivas em relação à Matemática e envolvê-los em actividade matemática significativa
- desenvolver novas relações aluno-aluno, professor-aluno e Matemática-aluno-professor.
- que os alunos contactassem com uma Matemática mais viva
- que os alunos tivessem um papel mais activo
- desenvolver nos alunos atitudes positivas em relação à Matemática

Estas conclusões vão ao encontro das reflexões de Ponte (1995).

O facto de o programa de computador com que os alunos trabalharam permitir explorar a interpretação geométrica de conceitos ligados ao estudo das derivadas, facilitou e ampliou a compreensão deste tema. Alguns dos alunos investigados, por exemplo, sabiam que o declive de uma recta era o coefiente **m** da expressão $y = mx + b$, mas não tinham qualquer noção do seu significado geométrico em termos da maior ou menor inclinação da recta que a expressão representava. Sabiam também que a derivada de uma função num ponto era o limite de uma razão incremental mas não conseguiam atribuir esse conceito complexo ao significado dinâmico que o programa lhes proporcionou do declive da recta tangente à curva nesse ponto. Através do desenvolvimento das actividades com recurso a ferramentas computacionais que visavam uma melhor compreensão da noção de derivada, alguns alunos apreenderam o significado dinâmico desse conceito. No entanto, ao longo do estudo, foi também possível verificar que, para alguns alunos, não chegou a existir uma suficiente harmonização dos métodos analíticos e dos processos apoiados pelo computador no que diz respeito à definição de derivada de uma função num ponto.

Os alunos manifestaram-se, de um modo geral, interessados e motivados no desenvolvimento das actividades, em grupo e com a utilização de ferramentas computacionais. Gerou-se um ambiente de trabalho muito dinâmico em que os alunos se tornaram mais activos, investigativos e cooperativos. O processo de aprendizagem desenvolveu-se numa atmosfera estimulante e socialmente saudável despertando nos alunos o sentido de responsabilidade e auto-confiança. Os alunos encararam a aprendizagem da Matemática de uma forma positiva.

De acordo com as respostas dadas pelos alunos ao inquérito final, o desenvolvimento de actividades em contextos computacionais geraram, de um modo geral, uma boa motivação. Todos os alunos se manifestaram de uma forma favorável em relação à experiência.

O ambiente que se viveu ao longo desta investigação permitiu: que as aulas decorressem sem tensões; favoreceu a criatividade e desenvolveu o espírito crítico; deu origem a diferentes processos de enfrentar situações problemáticas; contribuiu para que o pêndulo educativo se movesse de uma ênfase nos processos analíticos e no desenvolvimento de técnicas de cálculo para uma ênfase nos processos gráficos de resolução de problemas; proporcionou uma maior clarificação dos conceitos matemáticos ligados ao estudo das derivadas de funções, tendo favorecido o estabelecimento de conexões entre eles.

9.2.6. Perspectiva global sobre a intervenção didáctica

A intervenção didáctica que operacionalizou a experiência de ensino levada a cabo neste estudo tem por base um modelo da hipótese teórica de que o estudo dos conceitos de Análise privilegiando uma abordagem gráfica, com recurso a ferramentas computacionais, pode elevar nos alunos a compreensão desses conceitos.

Esta intervenção didáctica envolveu alguns dos alunos de duas turmas de 12º Ano de escolaridade, de uma Escola Secundária dos arredores de Lisboa, no ano lectivo de 1994/95. Ocupou um total de trinta e seis aulas (vinte aulas em horário extra-lectivo com recurso a ferramentas computacionais e dezasseis aulas na sala habitual) entre os meses de Março a Junho.

Os conceitos envolvidos no estudo das derivadas foram abordados de uma forma diferente da tradicional:

- Privilegiou-se uma abordagem gráfica desses conceitos, em detrimento de uma abordagem analítica;
- As actividades propostas foram desenvolvidas em contexto computacional, com recurso ao programa *A Graphic Approach to the Calculus*.
- Todas as actividades propostas foram desenvolvidas em grupo.

Durante este estudo, o processo de ensino e aprendizagem das derivadas decorreu num ambiente de trabalho que estimulou o envolvimento dos alunos na construção do seu próprio conhecimento. O trabalho em pequenos grupos, permitiu que os alunos desenvolvessem as capacidades de argumentar, debater, criticar, expôr ideias e ouvir as dos seus colegas, comparar estratégias e soluções. Os alunos ao explicitar, defender, ou discutir a sua linha de raciocínio junto dos colegas, tiveram oportunidade de reflectir sobre os seus próprios processos de pensamento e para analisar criticamente os processos utilizados pelos colegas. As discussões que tiveram lugar nos grupos foram momentos ricos de aprendizagem. Quando argumentavam entre si para decidir o que fazer, ou confrontavam entendimentos diferentes da situação, os alunos explicitavam dúvidas, explicavam processos, em suma, comunicavam. Por vezes, a linguagem utilizada, não era muito cuidada (formalmente) mas era uma forma de se expressarem que lhes facilitou a apropriação dos conceitos envolvidos. A professora e a investigadora foram aproveitando momentos significativos das discussões nos grupos, sugeriram, quando necessário, formas diferentes de analisar as questões, alertaram os alunos para aspectos particulares do problema que os ajudaram a fazer conexões entre conceitos matemáticos. Os alunos tiveram tempo para explorar as actividades.

Parece-nos possível sublinhar que os alunos envolvidos nesta experiência de ensino tiraram grande proveito de uma metodologia baseada no desenvolvimento de actividades em pequenos grupos. Os alunos interagiram uns com os outros para negociar e obter consensos e para chegar a conclusões que podiam não ter atingido trabalhando individualmente.

A professora da turma considerou que o trabalho desenvolvido na sala de computadores, tinha sido muito importante para alguns alunos, sobretudo para aqueles que faziam muitos exercícios sem pensarem bem naquilo que faziam e "nem sequer tinham coragem para colocar dúvidas". Afirmou que este trabalho tinha ajudado alguns alunos a "não fazerem exercícios por simples rotina", e que o facto de terem de dar uma justificação, tinha permitido não só uma maior interiorização dos conceitos mas também uma maior consciencialização de pequenos pormenores de resolução o que não teria acontecido, certamente, num tipo de metodologia que privilegiasse um trabalho individual com a meta de chegar a um resultado correcto.

Prof: ... Mesmo a Cristiana só agora é que começou a conseguir ter coragem para me colocar as dúvidas, porque ela, no início do ano, nem coragem tinha para fazer isso.

Inv: Na sala de computadores, tem-se notado uma evolução significativa nos processos utilizados por esta aluna na resolução das questões e na confiança que tem vindo a ganhar.

Prof: Ela conseguiu. E penso que se ela conseguir agora boas notas, ela deve muito ao facto de ter estado com outros colegas, a tentar explicar aos outros...

Inv: Exactamente, porque era ela que, muitas vezes, tinha que explicar aos outros...

Prof: ... e isso ajudou-a imenso. Porque ela começou a sentir necessidade de arranjar palavras para ver se os outros entendiam e, muitas vezes, a meio, dava-se conta de que ela também não estava a perceber bem "afinal eu também não estou a perceber...", não é? Ou seja, ela própria, por vezes, não tinha visto bem as coisas.

Inv: Resolvia as questões com uma certa rotina...

Prof: Sim, como uma rotina... E ela, como também aconteceu com outros alunos, aprenderam a não fazer as coisas por rotina. Acho que, estas aulas lhes fizeram muito bem.

Os alunos envolveram-se activamente no desenvolvimento das actividades propostas:

- A dependência dos alunos da professora e/ou investigadora que se notava no início da intervenção didáctica foi-se tornando cada vez menor, à medida que a experiência ia decorrendo. Pouco a pouco, os alunos adquiriram uma certa confiança e autonomia.
- Ao longo de toda a intervenção, os alunos desenvolveram as actividades que lhes foram propostas manifestando uma atitude de persistência.

- Aderiram bem à metodologia de trabalho em grupo.
- Desenvolveram estratégias e métodos próprios na resolução das questões que lhes foram propostas; cultivaram a troca de ideias; desenvolveram capacidades de reflexão, argumentação e de exposição dos seus raciocínios.
- Por vezes, dentro de um mesmo grupo, os alunos manifestaram diferentes opiniões, diferentes estratégias de resolver as questões. A troca de ideias nos grupos foi mutuamente benéfica, uma vez que, obrigou não só a uma maior clarificação e interiorização dos conceitos construídos mas também a uma confronto com estratégias diferentes.
- O facto dos elementos de alguns grupos privilegiarem estratégias diferentes de resolução das questões, não afectou negativamente as interacções que se desenvolveram nesses grupos.
- A interacção entre pares foi importante, quer a nível dos objectivos cognitivos, quer a nível dos objectivos sociais. O desenvolvimento das actividades propostas, resolvidas em grupo com o auxílio do computador, levou os alunos a cooperar de uma forma sã e efectiva.
- Os alunos manifestaram reacções de um verdadeiro envolvimento: comunicaram, ajudaram-se uns aos outros, deram sugestões, pediram opiniões, discordaram de algumas afirmações feitas, concordaram com outras, analisaram situações, brincaram, riram, enfim, viveram este trabalho de uma maneira diferente.
- Desenvolveram as actividades sem manifestarem grandes ansiedades e receios de errar. Não se fazia sentir qualquer tipo de competição entre os alunos.
- A maioria dos alunos não manifestou dificuldades na utilização do programa de computador utilizado na experiência de ensino.
- Os alunos que privilegiaram estratégias analíticas na resolução de questões, no início da intervenção, manifestaram-se um pouco confusos. Ultrapassaram as dificuldades com que se depararam e, ainda que não possamos afirmar que tenham mudado radicalmente a sua forma de pensar, pelo menos compreenderam algumas das vantagens de uma abordagem gráfica das questões, e tentaram aderir a uma outra forma de construir o conhecimento.

- A intervenção didáctica proporcionou aos alunos uma mudança significativa no que diz respeito ao estabelecimento de conexões entre as estratégias analíticas e gráficas de resolver as questões.
- Todos os alunos melhoraram significativamente os seus desempenhos na disciplina de Matemática, no terceiro período lectivo, período em que decorreu a intervenção.
- Todos os alunos que participaram na intervenção consideraram importante o trabalho que aí desenvolveram, apelando para a necessidade de pôr em prática actividades semelhantes em anos anteriores.

Nesta intervenção didáctica tentou compreender-se processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos num determinado contexto e dentro de uma determinada perspectiva teórica sobre a aprendizagem.

O balanço da intervenção didáctica desenvolvida é considerado francamente positivo quer pelos alunos "é um incentivo para estudar, brincando com a Matemática", quer pela professora "eles não estão a decorar regras mas a tentar perceber, a visualizar situações" quer ainda pela investigadora "os alunos nunca têm pressa de sair... Há sempre mais um exemplo a experimentar. Dá gosto ver o seu envolvimento na realização das actividades".

9.3. Implicações

A investigação feita permite apresentar algumas implicações didácticas e temas a aprofundar em futuras investigações.

9.3. 1 Implicações didácticas

Numa sociedade caracterizada por mudanças frequentes e rápidas, as competências matemáticas necessárias aos indivíduos para uma vida produtiva nessa sociedade, têm que ser alteradas. A escola é o espaço adequado ao desenvolvimento dessas competências. As actividades levadas a cabo durante esta investigação proporcionaram o desenvolvimento das capacidades de formular conjecturas, investigar, raciocinar logicamente e comunicar. Num ensino que visa a construção do conhecimento é de considerar o desenvolvimento de actividades que permitam não só explorações que levem a uma melhor compreensão dos conceitos mas também à construção de novos conceitos. Assim, parece de crucial importância a implementação de metodologias em que os alunos sejam os construtores da sua própria aprendizagem.

Há algumas implicações para o curriculum escolar e para os métodos de ensino sugeridos pelos resultados deste estudo. Esta experiência de ensino privilegiou uma abordagem gráfica do estudo das derivadas de funções com recurso a ferramentas computacionais, não por ser a única abordagem possível mas por se considerar uma via importante da aprendizagem do tema, que está em consonância com os objectivos gerais do currículo da Matemática "... os alunos devem ser preparados para um diálogo inteligente com as ferramentas que já existem" (DES, 1997, p. 10). Esta investigação reforçou o papel das representações gráficas na aprendizagem dos conceitos fundamentais da Análise, pois demonstrou que os alunos constroem um conhecimento mais rico como resultado de um ensino gráfico, o que não acontece pela estrita adesão a uma abordagem analítica.

Aprendizagem em espiral

Os alunos não chegam ao estudo da Análise com uma forte compreensão dos conceitos que lhe estão subjacentes. Os professores devem assumir que a aprendizagem destes conceitos é feita em espiral e que têm a responsabilidade de desenvolver e aprofundar a compreensão que os alunos têm desses conceitos. Uma implicação educacional óbvia do estudo é que os fundamentos da Análise precisam ser retomados e desenvolvidos em vários momentos do princípio ao fim da educação matemática dos alunos. Uma primeira abordagem da diferenciação deve ser muito informal e deve ser largamente baseada em explorações numéricas e gráficas assistidas por computador. A derivação não deve ser ensinada a partir de regras. Estas devem ser progressivamente descobertas a partir de um trabalho levado a cabo pelos alunos.

Múltiplas representações

Durante esta experiência de ensino os gráficos de funções desempenharam um papel importante na exploração e construção de conceitos de Análise. Alguns desses conceitos não eram completamente novos para os alunos. Contudo, perante uma mesma estratégia de ensino baseada na representação gráfica de funções e derivadas, os alunos privilegiaram estratégias diferentes, fruto, possivelmente, de aprendizagens anteriores ou de concepções diferentes em relação à Matemática. O dia-a-dia da sala de aula de Matemática envolve alunos com tipos de pensamento diferentes, alunos com concepções diferentes da Matemática, o que deverá ser tido em conta na organização da sala de aula, e particularmenre nas tarefas a propor.

No nosso estudo verificámos que, como consequência de uma estratégia de ensino baseada na utilização de múltiplas representações, a maioria dos alunos tornou-se versátil na sua utilização e raciocinou entre essas representações. Assim, as múltiplas representações podem enriquecer a compreensão dos conceitos de Análise. O ensino deve proporcionar essas múltiplas representações, em detrimento de meras apresentações de regras e procedimentos para calcular derivadas. As técnicas memorizadas na ausência de compreensão relacional são facilmente esquecidas. Os alunos devem ter oportunidade de construir conexões viáveis entre as representações gráficas e analíticas de funções.

Todos os tópicos devem ser apresentados graficamente, numericamente e analiticamente e, se possível, a partir de situações da vida real.

O nosso estudo mostra que os computadores são ferramentas poderosas e flexíveis indispensáveis para o estudo das funções, em geral, e das derivadas, em particular, numa linha consistente com as ideias de Tall (1986c, 1989) e dos autores dos Programas de Matemática (DES, 1997).

Conceitos matemáticos da Análise

Ao longo desta investigação foram evidentes dois obstáculos no estabelecimento de conexões entre a representação gráfica e analítica da derivada. O primeiro obstáculo foi a compreensão que os alunos tinham do conceito de tangente em termos geométricos (tangente a uma circunferência). O segundo obstáculo foi a compreensão dos alunos do conceito de declive dessa recta tangente. Os alunos estavam habituados a pensar em dois pontos para determinar o declive de uma recta. Quando os conceitos de declive e de tangente foram ligados no processo limite de definir a derivada num ponto, os alunos, de início, tiveram dificuldade em ver como é que a recta secante se tornava uma recta tangente. Estas observações sugerem várias questões de investigação para o desenvolvimento curricular e para o ensino da Análise. Primeiro, como deve ser apresentado o conceito de recta tangente para que o aluno desenvolva imagens apropriadas no uso da tangente aquando do estudo da Análise? Segundo, como deve ser apresentado o conceito de declive para que esse conceito possa ser generalizado do declive de uma recta (em que se consideram dois pontos) para o declive de uma curva arbitrária num ponto particular? Terceiro, como deve ser apresentado o conceito de limite para que o aluno ligue, com sucesso, os conceitos de declive e tangência ao definir derivada?

Cada um dos três conceitos — declive, tangente e limite — envolve o uso de palavras que têm significado quer no dia-a-dia quer em contextos matemáticos. É necessária mais investigação no sentido de perceber como é que os alunos interpretam estas palavras no seu dia-a-dia e como é que fazem a transição para o contexto matemático.

Generalização da experiência

A experiência de ensino realizada leva-nos a concluir que o tipo de aulas realizado, com recurso a ferramentas computacionais, se pode e deve generalizar e integrar no horário normal dos alunos. No entanto, reconhecemos que devem ser tidas em conta algumas condições para que se realize com sucesso: por exemplo, as aulas de Matemática podiam contemplar uma componente prática em que a turma fosse dividida, para trabalhar no Laboratório de Matemática (DES, 1997) à semelhança do que acontece com outras disciplinas. Para esta experiência de ensino ser levada à sala de aula, consideramos ainda que alguns aspectos podiam ser alterados. Embora não se tivessem evidenciado problemas pelo facto de a maior parte das actividades desenvolvidas não contemplarem situações reais, poder-se-ia ter introduzido mais situações desse tipo. Além disso, é de considerar a possibilidade de incluir, depois de uma primeira fase de actividades mais estruturadas que visam a construção dos conceitos envolvidos no estudo das derivadas de funções, outras actividades mais abertas que envolvam a resolução de problemas concretos de aplicação das derivadas.

Durante esta investigação, os momentos de discussão das actividades envolveram, de uma maneira geral, um grupo de alunos e a professora e/ou a investigadora. Para um maior intercâmbio de perspectivas de resolução e partilha de dificuldades sentidas pelos alunos, esses momentos de discussão deveriam ser alargados, envolvendo a professora e/ou investigadora e os vários grupos de alunos.

Sugerem-se também algumas recomendações no que diz respeito a características específicas que o *software* a utilizar deve possuir. Este deve permitir o estudo de qualquer tipo de funções e a partir de qualquer uma das suas representações. A capacidade de fornecer as coordenadas de qualquer ponto do plano devia estar presente em qualquer tipo de representação.

9.3.2. Implicações para a investigação

Depois de retirarmos algumas conclusões da investigação feita, e de apontarmos algumas implicações didácticas, resta-nos mencionar algumas vias a explorar em futuras investigações.

Comunicação

Embora a procura de argumentos para convencer ou esclarecer um colega sobre as conclusões a que tinham chegado tenha ajudado os alunos a clarificar e aprofundar progressivamente as suas ideias, ao longo desta intervenção didáctica, foram evidenciadas, por vezes, dificuldades na sua apresentação, quer oralmente quer por escrito. Nos diálogos travados entre os alunos e entre os alunos e a investigadora, percebe-se a preocupação desta em relação ao modo como os alunos comunicavam ideias matemáticas. A investigadora tentava que os alunos transformassem as suas justificações intuitivas e informais em justificações mais formalizadas do ponto de vista matemático. Porquê este tipo de justificação dada pelos alunos? Será que o facto de se ter privilegiado uma abordagem gráfica dos conceitos implicou uma justificação baseada na intuição e no informal? Com que dificuldades se confrontam os alunos perante a comunicação de ideias matemáticas?

Interacções

Durante esta experiência de ensino, os alunos trabalharam em pequenos grupos o que veio criar novas interacções: aluno-aluno, aluno-professor, aluno-investigadora, aluno-computador que se reflectiram de uma forma positiva nos processos de aprendizagem dos alunos. Como poderiam ter sido enriquecidas essas interacções?

A experiência de ensino permitiu que cada grupo caminhasse ao seu ritmo. Assim, numa mesma aula, os alunos podiam desenvolver actividades diferentes o que fomentava apenas as discussões em pequeno grupo. Os alunos poderiam ter beneficiado de uma discussão mais alargada entre os diferentes grupos. Essa discussão em grande grupo poderia elevar as aprendizagens dos alunos? Quando e de que modo poderiam ter lugar essas discussões?

Os grupos formados apresentavam características diferentes que se reflectiram no trabalho desenvolvido dentro do grupo. Perspectivas diferentes nos elementos do grupo conduziram a situações diferentes. Num dos grupos, por vezes, não existiu trabalho em grupo. Os alunos estavam sentados lado a lado mas cada um seguia a "sua" estratégia. Nos outros dois grupos, no entanto, perspectivas diferentes conduziram a debates interessantes e a uma não radicalização das estratégias. Seria interessante perceber as influências na aprendizagem das interacções entre grupos de alunos que privilegiam estratégias diferentes de resolução das questões.

Computador

Os avanços na tecnologia gráfica permitem que os alunos resolvam muitos problemas que eram tradicionalmente resolvidos usando apenas técnicas analíticas. Os gráficos proporcionados pelo computador removem as competências de manipulação analítica como um pré-requisito para fazer conexões entre as representações analítica e gráfica. A capacidade de ligar diferentes representações ajuda a mostrar as facetas diferentes de uma ideia complexa de uma forma explícita e dinâmica.

Alguns alunos manifestaram, a princípio, alguma dificuldade em trabalhar com o computador. Outros alunos estavam já familiarizados com essa ferramenta. Este factor pode ter alguma influência na motivação dos alunos ?

Perante uma investigação que privilegiava uma abordagem gráfica do estudo das derivadas, uma aluna evidenciou preferência pela utilização de estratégias analíticas no desenvolvimento da maior parte das questões, tendo manifestado, por vezes, pouca confiança nos métodos visuais de resolução. O uso mais sistemático de ferramentas computacionais poderá alterar as convicções dos alunos neste campo? Quais os mecanismos que medeiam o estabelecimento de ligações entre as representações gráfica e analítica? Qual o efeito da abordagem gráfica versus a abordagem analítica nos conceitos imagens que os alunos formam? Do que é que os alunos se lembram em relação aos conceitos mais elementares dos seus cursos de Matemática depois de alguns anos? Quais as formas mais comuns de retenção (gráfica, analítica, relacional)? Terá o raciocínio visual pouco peso no raciocínio matemático? Deverá este raciocínio continuar a ser considerado pouco digno e de nível inferior ao raciocínio analítico?

Quais os efeitos didácticos da utilização de ferramentas computacionais, na sala de aula?

Quais os efeitos das ferramentas computacionais no plano afectivo e social? Que interacções se estabelecem na relação triangular professor/aluno/computador, nas aulas com recursos a ferramentas computacionais?

Poderão ser alvo de investigação outros materiais pedagógicos, como por exemplo, diferente *software* gráfico ou mesmo o uso da calculadora gráfica.

Há necessidade ainda de explorar modos de motivar os professores de Matemática para o uso de tecnologias e em novas abordagens de conceitos matemáticos.

Actividades

As fichas de trabalho utilizadas neste estudo envolviam actividades bastante dirigidas e, de certo modo, ligadas directamente aos conteúdos programáticos. Devem ser privilegiadas actividades mais abertas? Devem contemplar mais problemas da vida real? Como harmonizar as actividades ligadas a problemas da vida real com os conteúdos programáticos? Parece importante e urgente investigação neste campo.

9.4. Observações finais

Nenhuma teoria de aprendizagem descreve completamente como é que os alunos adquirem compreensão matemática. Alguns olham a aprendizagem da Matemática como a aquisição de competências algorítmicas, outros vêem-na como a compreensão de conceitos e relações que definem a estrutura da Matemática, e muitos vêem-na como o desenvolvimento de competências na resolução de problemas. Quando nos aproximamos do século XXI enfrentamos o desafio de adaptar os nossos métodos de ensino e práticas de sala de aula de encontro às necessidades da sociedade actual e futura.

Não acreditamos em mudanças na educação sem que os professores sintam a sua necessidade. O computador, se introduzido na aula de Matemática sem qualquer projecto educativo que o sustente, será mais um "modernismo" que nada mudará para além de poder criar insegurança em professores e alunos.

Como é que os professores vão enfrentar as mudanças que estão a ter lugar no ambiente educacional? Novas tecnologias, ideias e métodos estão circundantes à sala de aula. Como vamos saber o que é importante nesta mudança? Haverá bastante investigação e informação para nos guiar na implementação das mudanças que é preciso fazer?

O computador e o *software* utilizados parecem ter sido ferramentas que fomentaram um ambiente de trabalho vivo e que proporcionaram aos alunos uma forma diferente de encarar o tema derivadas de funções. Os alunos manifestaram-se muito activos no desenvolvimento das actividades propostas. A determinação gráfica da derivada de uma função num ponto surgiu como uma forma alternativa à resolução analítica e os alunos conseguiram resolver problemas que se situaram para além das suas capacidades de cálculo.

Durante esta investigação, a organização dos alunos em pequenos grupos, foi responsável pelo desenvolvimento de atitudes de verdadeira cooperação, de reflexão e de sentido crítico.

No que diz respeito ao ensino, a metodologia utilizada representa uma abordagem que vai ao encontro Programas de Matemática "... cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa" (DES, 1997, p. 9), e das recomendações das Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar "o currículo de cálculo matemático deve incluir a exploração informal de conceitos de cálculo quer a partir de uma perspectiva gráfica quer numérica" (NCTM, 1991, p. 180). A realização de fichas de trabalho com recurso a ferramentas computacionais colocaram o aluno numa posição de construtor do processo de ensino-aprendizagem. É possível, neste momento, em muitas das nossas escolas levar a cabo intervenções deste tipo recorrendo a ferramentas computacionais. Os autores dos novos Programas de Matemática vão mais longe quando consideram o seu uso obrigatório "O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a alunos e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa." (DES, 1997, p. 11).

Este estudo pode contribuir para mostrar o papel que as representações gráficas desempenharam no processo de ensino e aprendizagem da Análise. Os alunos construíram, de uma forma diferente, conceitos respeitantes ao tema derivadas de funções, e viveram com entusiasmo esta experiência. Construíram conhecimento como resultado de uma abordagem gráfica das questões. Desenvolveram representações internas únicas na forma de imagens, que não são as representações que os professores lhes impõem.

Agradecimentos

Este trabalho beneficiou da colaboração prestada por diversas pessoas. Para todas elas o meu agradecimento pela solidariedade manifestada.

Em especial:

Ao Dr. José Manuel Matos, o apoio científico, os comentários perspicazes, as sugestões e o incentivo que deu ao longo das várias fases deste trabalho.

À Dra. Manuela Taborda, com quem muito aprendi e sem a qual este trabalho não seria possível, pela disponibilidade e empenho com que colaborou nesta investigação bem como pelas palavras de estímulo e encorajamento.

À Dra. Margarida Junqueira, o valor das suas sugestões e a forma como sempre me incentivou a continuar este trabalho.

Ao Dr. José Moura Carvalho, pelas traduções e pela sua incansável disponibilidade.

Ao Dr. Vitor Teodoro todo o apoio nas fontes bibliográficas.

Aos alunos que participaram neste estudo, pelo modo com que me acolheram nas suas aulas. Um agradecimento especial à Cristiana, Filipe, Luís Carlos, Luís Filipe, Paulo e Zé pela simpatia, disponibilidade e pelo entusiasmo com que colaboraram nas actividades propostas.

Bibliografia

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática—A experiência do Projecto MAT789.* Tese de Doutoramento apresentada na Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Artigue, M. (1991). Analysis. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer.

Artigue, M. (1993). The use of computers in learning to correlate algebraic and graphic representations of functions. Em B. Jaworski (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (TMT93) (pp. 109-116). Birmingham, Reino Unido: University of Birmingham.

Aspinwall, L. N. (1994). *The role of graphic representation and students' images in understanding the derivative in Calculus: Critical case sudies.* Tese de Doutoramento apresentada na University of Florida.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Bell, A. e Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics, 2*(1), 34-42.

Bell, A., Brekke, G. e Swan, M. (sem data). Misconceptions, conflict and discussion in the teaching of graphical interpretation. Nottingham: The Shell Centre for Mathematical Education.

Bogdan, R. e Bilken, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borba, M. (1993). *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software.* Tese de Doutoramento apresentada na Cornell University.

Cardoso, M. F. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: Estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades*. Tese de Mestrado apresentada na Universidade do Minho. Lisboa: APM.

Carneiro, R. (1988). *Portugal — os próximos 20 anos — Educação e Emprego em Portugal, Uma Leitura da Modernização.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo.* Tese de Mestrado apresentada na Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Carreira, S. e Matos, J. F. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante—Revista Teórica de Investigação, 3*(1), 19-53.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. Em L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1 (pp. 369-375). Países Baixos: State University of Utrecht.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in Cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 77-87.

Cobb, P., Steffe, L., (1983). The constructivist researcher as the teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14,* 83-94.

Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. Em C. B. Cazden (Ed.), *Review of Research in Education,* (pp. 3-56). Washington: American Educational Research Association.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe International PME,* (pp. 322-326). Grenoble.

Costa, A. (1986). A pesquisa de terreno em Sociologia. Em A. Silva e J. M. Pinto (Orgs.), *Metodologia das Ciências Sociais* (pp. 129-148). Porto: Edições Afrontamento.

De Corte, E. (1992). Aprender na escola com as novas tecnologias da informação. Em V. D. Teodoro e J. C. Freitas (Orgs.), *Educação e computadores* (pp. 99-117). Lisboa: GEP.

DES (1997). *Matemática — Programas, 10º 11º e 12º Anos.* Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

DGEBS (1991a). *Programa Matemática — Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino básico 3º Ciclo* (II). Lisboa: INCM EP.

DGEBS (1991b). *Matemática — Métodos Quantitativos — Organização curricular e programas, Ensino secundário.* Lisboa: INCM EP.

Dickson, L., Margaret, B. e Gibson, O. (1988). *Children learning mathematics.* Londres: Cassell Educational.

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações.* Tese de Mestrado apresentada na Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. Em P. Nesher e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 113-134). Cambridge: University Press.

Dreyfus, T. (1994). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. e Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 360-380.

Duarte, J. (1993). *O computador na Educação Matemática: Percursos de formação.* Tese de Mestrado apresentada na Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 153-174). Washington: Mathematical Association of America.

Eisenberg, T. (1994). Functions and associated learning difficulties. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer.

Eisenberg, T. e Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in Mathematics. *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, (pp. 153-159). Londres.

Ellison, M. J. (1993). The effect of computer and calculator graphics on students' ability to mentally construct calculus concepts (Computer Graphics, Graphing, Calculators). Tese de Doutoramento apresentada na University of Minnesota. *ProQuest — Dissertation Abstracts International*, nº 9411246.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). Nova Iorque: Macmillan.

Ferrini-Mundi, J. e Lauten, D. (1993). Teaching and learning Calculus. Em P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 155-176). Nova Iorque: Macmillan.

Fey, J. (1984). Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fey, J. (1991). Tecnologia e Educação Matemática — Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes. Em J. P. Ponte (Org.), *O computador na Educação Matemática* (Cadernos de Educação Matemática, nº 2, pp. 45-79). Lisboa: APM.

Fischbein, E., Tirosh, D. e Melamed, U. (1981). It is possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics, 12*, 491-512.

Fiske, M. B. (1994). *A comparison of the effects on student learning of two strategies for teaching the concept of derivative.* Tese de Doutoramento apresentada em Ohio State University.

Frutuoso, C. e Nunes, M. F. (1994). Concepções erradas sobre o conceito de área em alunos do 5º Ano. *ProfMat 94 — Actas* (pp. 226-231). Lisboa: APM.

Giménez, C. (1990). *La velocidad: Introduction al concepto de derivada.* Tese de doutoramento apresentada na Universidade Autónoma de Barcelona.

Giménez, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de Bup en relacion con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilon, 24*, 9-22.

Goldenberg, E. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 135-173.

Heid, M. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 3-25.

Hershkowitz, R. (1989). Psychological aspects of learning geometry. Em J. Kilpatrick e P. Nesher (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations — Studies and teaching experiments*. Tese de Doutoramento apresentada na Université du Québéc.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 67-72). Hillsdale, Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Janvier, C. (1987d). Translation processes in mathematics education. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 27-31). Hillsdale, Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Janvier, C., Girardon, C. e Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. Em P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 79-102). Nova Iorque: Macmillan.

Junqueira, M. (1995). *Aprendizagem da Geometria em ambientes computacionais dinâmicos — Um estudo no 9º ano de escolaridade.* Tese de Mestrado apresentada na Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.

Kantowski, M. G. (1987). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. Em L. Hatfield (Ed.), *Mathematic problem solving* (pp. 43-52). Columbus, Ohio: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. (1986). *Information technology and mathematics: Opening new representational windows*. Cambridge, MA: Educational Technology Center.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school Algebra. Em P. Nesher e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press.

Kloosterman, P. e Gainey, P. (1993). Students' thinking. Em D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom — Middle grades mathematics*, (pp. 3-21). NCTM. Nova Iorque: Macmillan.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations — Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris: Hermann.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. e Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60* (1), 1-64.

Lesh, R. e Kelly, A. (1994). Action-theoretic and phenomenological approaches to research in mathematics education: Studies of continually developing experts. Em R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 277-286). Dordrecht: Kluwer.

Lesh, R., Post, T. e Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. Em C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in teaching and learning mathematics,* (pp. 33-40). Hillsdale, Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Lynch, J., Fischer, P. e Green, S. (1989). Teaching in a computer-intensive algebra curriculum. *Mathematics Teacher, 82,* 688-694.

Markovits, Z., Eylon, B-S e Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 18-24, 28.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* S. Francisco: Jossey-Bass.

Monk, S. (1992). Sudents' understanding of a function given by a physical model. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 175-193). Washington: Mathematical Association of America.

Morin, E. (1984). *Sociologia*. Mem Martins: Publicações Europa América.

Mourão, A. P. (1994). Processos de resolução de problemas: Algumas questões. Em D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Org.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular,* (pp. 287-293). Lisboa : IIE.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE.

Nemirovsky, R. e Rubin, A. (1992). Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative. Working Paper 2-92. Cambridge, Massachusetts: Technical Education Research Center.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 235-250.

Orton, A. (1983). Students' understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 1-8.

Ottinger, T. P. (1994). Conceptual and procedural learning in first year algebra using graphing calculators and computers. Tese de Doutoramento apresentada na University of Georgia. *Dissertation Abstracts International,* nº 9335070.

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation.* Newbury Park: Sage.

Piston, C. (1992). Supplementing the graphing curriculum. *Mathematics Teacher, 85,* 336-341.

Poisson, Y. (1990). *La recherche qualitative en éducation.* Québec: Presses de L' Université.

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of cartesian graphics.* Tese de Doutoramento apresentada na Universidade de Georgia. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1985). Concepções e dificuldades dos alunos em raciocínio funcional. PROFMAT—*Revista Teórica e de Investigação sobre o Ensino da Matemática, 1*, 234-248.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática, 15*, 3-9.

Ponte, J. P. (org.), (1991b). *O computador na Educação Matemática. Cadernos de Educação Matemática, nº 2*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante —Revista Teórica de Investigação, 3*(1), 3-18.

Ponte. J. P. (1994). Uma disciplina condenada ao insucesso? *Revista Noesis, 32*, 24-26.

Ponte, J. P. (1994). Rigor instrumental versus relevância e consistência epistemológica na investigação em resolução de problemas. Em D. Fernandes, A. Borralho e G. Amaro (Org.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*, (pp. 295-302). Lisboa : IIE.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática, 34*, 2-7.

Santos, B. S. (1987). *Um discurso sobre as Ciências.* Porto: Edições Afrontamento.

Scher, D. (1993). Rethinking Calculus reform. Tese de Mestrado apresentada em Cornell University. Ithaca.

Schwarz, B., Dreyfus, T. e Bruckheimer, M. (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers & Education, 14*(3), 249-262.

Schwingendorf, K., Hawks, J. e Beineke, J. (1992). Horizontal and vertical growth of the student's conception of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 133-149). Washington: Mathematical Association of America.

Selden, A. e Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 1-21). Washington: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psycology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 162-169). Montréal: Université de Montréal.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. Em G. Vergnaud, J. Rogalski e M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 151-158). Paris: Laboratoire PSYDEE.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification — The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington: Mathematical Association of America.

Sheets, C. (1993). Effects of computer learning and problem-solving tools on the development of secundary school students' understanding of mathematical function. Tese de Doutoramento apresentada em University of Maryland College Park. *Dissertation Abstracts International*, nº 9327495.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. Em M. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching* (3ª ed.), (pp. 3-36). Nova Iorque: Macmillan.

Silva, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*. Lisboa: Edição GEP.

Silver, E. (1987). Fundations of cognitive theory and research for mathematics problem -solving instruction. Em A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 33-60). Nova Jersey: Lawrence Erlbaum.

Sullivan, P. E. (1995). The effect of visual, numerical and algebraic representations on students' understanding of differencial calculus. Tese de Doutoramento na University of Columbia.

Tall, D. (1977). Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics. *Mathematical Education for Teaching, 2*(4), 2-18.

Tall, D. (1985). Using computer graphics programs as generic organisers for the concept image of differentiation. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 105-110). Noordwijkerhout.

Tall, D. (1985a). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 110*, 49-53.

Tall, D. (1985b). The gradient of a graph. *Mathematics Teaching, 111*, 48-52.

Tall, D. (1985c). Tangents and Leibniz notation. *Mathematics Teaching, 113*, 48-51.

Tall, D. (1986). A graphical approach to integration. *Mathematics Teaching, 114*, 48-51.

Tall, D. (1986c). Lies, damn lies and differential equations. *Mathematics Teaching, 114*, 54-57.

Tall, D. (1987). Algebra in a computer environment. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psycology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 262-271). Montréal: Université de Montréal.

Tall, D. (1987b). Constructing the concept image of a tangent. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psycology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 69-75). Montréal: Université de Montréal.

Tall, D. (1989). Concept images, computers, and curriculum change. *NCTM-Research Presession*, (pp. 1-13). Orlando.

Tall, D. (1990). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 37-42.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. Em D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). Nova Iorque: Macmillan.

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. Em R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 189-199). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1994). The psychology of advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. e Thomas, M. (1989). Versatile learning and the computer. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 117-125.

Teodoro, V. D. (1992). Educação e computadores. Em V. D. Teodoro e J. C. Freitas (Orgs.), *Educação e computadores*, (pp. 9-25). Lisboa: GEP.

Vala, J. (1986). A análise de conteúdo. Em A. Silva e J. M. Pinto (Orgs.), *Metodologia das Ciências Sociais*, (pp. 101-128). Porto: Edições Afrontamento.

Veloso, E. (1988). *O computador na aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. Em T. Eisenberg e T. Dreyfus (Eds.), *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 149-156.

Vinner, S. (1992) The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 195-213). Washington: Mathematical Association of America.

Vinner, S. (1994). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. e Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 356-366.

Vinner, S. e Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. Em R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psycology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley: University of California.

Vinner, S., Hershkowitz, R. e Bruckeimer (1981). Some cognitive factors as causes of mistakes in addition of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 70-76.

Vinner, S. e Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Vygotsky, L. (1988). *A formação social da mente*. S. Paulo: Edições Martins Fontes.

Wagner S. e Parker, S. (1993). Advanced algebra. Em P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*, (pp. 119-139). Nova Iorque: Macmillan.

Wheatley, G. e Brown, D. (1994). The construction and re-presentation of images in mathematical activity. *Proceedings of the Eighteen International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 1 (p. 81). Lisboa.

Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods.* Sage Publications.

Referências de *Software*

A Graphic Approach to the Calculus - David Tall, Harwick University, Amesterdão.

Fontes Bibliográficas utilizadas na elaboração das actividades

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in Cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(2), 77-87.

Ferrini-Mundi, J. e Lauten, D. (1993). Teaching and learning Calculus. Em P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 155-176). Nova Iorque: Macmillan.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM e IIE.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 235-250.

Ponte, J. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of cartesian graphics.* Tese de doutoramento apresentada na University of Georgia. Lisboa: APM.

Scher, D. (1993). Rethinking Calculus reform. Tese de Mestrado apresentada na Cornell University. Ithaca.

Tall, D. (1987). Algebra in a computer environment. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psycology of Mathematics Education,* Vol. 1 (pp. 262-271). Montréal: Université de Montréal.

Tall, D. (1987b). Constructing the concept image of a tangent. Em J. C. Bergeron, N. Herscovics e C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psycology of Mathematics Education,* Vol. 3 (pp. 69-75). Montréal: Université de Montréal.

Tall, D. (1989). Concept images, computers, and curriculum change. *NCTM-Research Presession,* (pp. 1-13). Orlando.

Anexo 1

Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12º Ano - I

Março / 1995

Noção de derivada (Programa GC)

A. Declive de uma recta

1. Determine o declive da recta de equação F1 considerando:

1.1. Os pontos A (0; -4) e B (5; 6)

1.2. Os pontos C (2; 0) e D (4,5; 5)

- Carregue o programa GC (digite GC e carregue em Enter duas vezes)
- Escolha a opção **2. Draw graphs**
- Digite F_1
- Escolha os intervalos [-8, 8] para ambos os eixos
- Carregue em F_1

Repare que o declive não depende dos pontos escolhidos sobre a recta.

2. Determine os declives das rectas F_2 e F_3.

- Carregue em F
- Escreva F_2
- Enter
- Carregue em F
- Escreva F_3
- Enter

Completa: O declive de uma recta depende ....

....

....

3. Relacione o declive das rectas com a monotonia das funções que elas representam.

4. Qual o declive de uma recta paralela ao eixo dos xx? Justifique.

5. E se a recta fosse paralela ao eixo dos yy?

B. Taxa de variação média

1. a) Represente, graficamente, a função f(x) = 2x + 1.

b) Calcule a taxa de variação média nos intervalos $[0,2]$ e $[-3,-1]$

2. a) Represente, graficamente, a função f(x) = exp(x).

b) Calcule a taxa de variação média nos intervalos $[-2, 0]$ e $[0,-2]$

3. Compare os resultados obtidos nas duas questões anteriores e relacione-os com o crescimento da função.

Nota: Repare que a taxa de variação média entre dois pontos de uma curva representa, geometricamente, o declive da recta que "passa" por esses dois pontos.

C. Tangente a uma curva num ponto

1. Represente, graficamente, a função $f(x) = -1/4\,(x - 1)\,(x - 9)$

Apague todas as funções anteriores:
- Clear
- Yes

a) Pretende-se determinar o declive da recta tangente à curva de f no ponto $P_0(1, 0)$.

Para isso, consideremos um ponto P (5, 4) sobre a curva.

Trace a recta secante que passa pelos pontos P_0 P.

- Menu
- Gradient
- 1. Drawing chords ...
- x : 1
- Enter
- Carregue em D e digite 4 (diferença do valor das abcissas dos dois pontos considerados)
- Enter
- Pressione W
- Pressione P

O declive da recta secante é ....

Imaginemos P a mover-se sobre a curva e a aproximar-se do ponto P_0. Determinemos os sucessivos declives das rectas secantes assim obtidas. Visualizemos esta situação.

- Carregue em Enter para ter novas posições do ponto P
- Digite de novo P para obter novas posições

Repare que o declive se está a aproximar de 2. Se quiser uma maior aproximação digite uma vez mais P

Trace a recta secante que "passa" nos pontos P_0 (1, 0) e P (-1, -5).

Imaginemos P a mover-se sobre a curva e a aproximar-se do ponto P_0.

Determine os sucessivos declives das rectas secantes.

Podemos afirmar que o declive da recta tangente à curva no ponto (1, 0) é **2.**

Definição

Ao quociente $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $(x \neq x_0)$ chama-se razão incremental da função f entre x_0 e x.

Ao limite desta razão, caso exista, chama-se **derivada** de f no ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0)$.

b) Determine o declive da recta tangente à curva nos pontos:

- (7, 3)
- (5, 4).

Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12º Ano - II

Março / 1995

Derivadas Laterais

1. Represente graficamente a função $f(x) = |x^2 - 4|$ (digite **abs** $(x^2 - 4)$).

a) Determine o declive da recta tangente à curva no ponto P_0 (2, 0), usando um procedimento análogo ao anterior (ou seja, considerando um ponto móvel, por ex., P (3, 5) à direita de P_0 e um ponto móvel P (1, 3) à esquerda de P_0).

b) Que conclui dos resultados obtidos?

c) Existe limite do quociente $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ quando $x \to 2$?

Repara, no entanto, que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -4$$ **e que**

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4$$

Ao primeiro limite chamamos derivada lateral esquerda no ponto x=2 e escrevemos $f'(2^-)$, ao segundo limite chamamos derivada lateral direita no ponto x=2 e escrevemos $f'(2^+)$.

Às rectas que obtiveram, chamamos semi-tangente à direita e à esquerda do ponto P_0 (2, 0).

2. **a)** Represente graficamente a função $g(x) = \sqrt{x}$ (**digite sqrt (x) ou pressione V e digite x**).

b) Determine, graficamente, g'(0).

3. Represente a função $f(x) = x^3$.

a) Determine graficamente:

$f'(0^+) = ...$

$f'(0^-) = ...$

Podemos concluir que f'(0) = ... , porque ....
....

4. Considere a função $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$

Tentemos traçar, de modo análogo, a recta tangente à curva no ponto (0, 0), considerando o ponto móvel à direita de 0.

- 4.Gradient
- F (Function)
- Digite 1/x
- Pressione F_1
- Pressione 1
- x : 0
- f(0) = 0
- Enter
- W (Wait)
- P (Plot)

4.1. Que valores vão sendo obtidos para o declive da recta?

4.2. O que aconteceria se o ponto móvel estivesse à esquerda do ponto inicial?

4.3. Existe tangente à curva de f nesse ponto?

4.4. Qual o valor da derivada no ponto 0?

5. Considere a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$

Tentemos traçar a recta tangente à curva no ponto (0, 0), considerando:

- O ponto móvel à direita de zero.
- O ponto móvel à esquerda de zero.

5.1. Que valores vão sendo obtidos para o declive em cada um dos casos?

5.2. Existe derivada da função no ponto 0? Justifique.

Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12º Ano - III

Março / 1995

Função Derivada

Definição

Função derivada de uma função **f** é uma função que tem por domínio o conjunto dos pontos do domínio de **f** com derivada finita e que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

1. a) Represente, graficamente, a função f(x)=x^2 e a sua função derivada.

- Gradient
- F (Function)
- Digite x^2
- Enter
- Pressione F_1
- Pressione 2.Gradient Curve
- Considere h = 0,1
- Enter

b) A partir da observação da função derivada, determine:

- $f'(0)$
- $f'(-2)$
- $f'(2)$
- $f'(1)$
- $f'(-1)$

2. a) Represente graficamente a função $g(x) = (x-1)^3 + 2$ e a sua função derivada.

b) A partir da observação da função derivada, determine:

- $g'(0)$
- $g'(1)$
- $g'(2)$

3. a) Represente graficamente a função $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 3x$

b) A partir da observação da função derivada, determine:

- $f'(-1)$
- $f'(3)$
- $f'(1)$
- $f'(0)$
- $f'(2)$

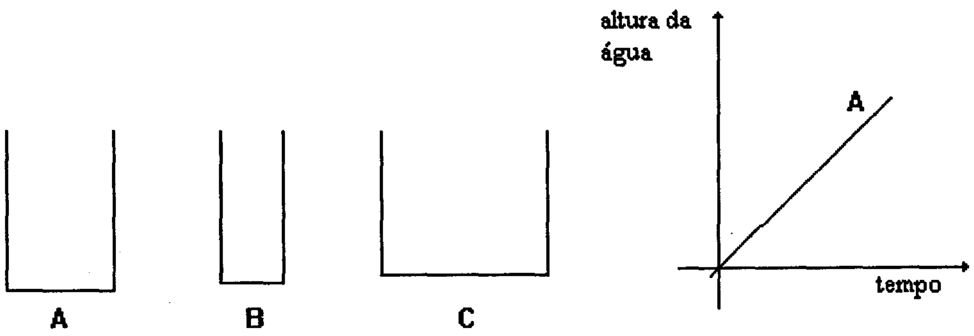
Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12º Ano - IV

Abril / 1995

Derivadas

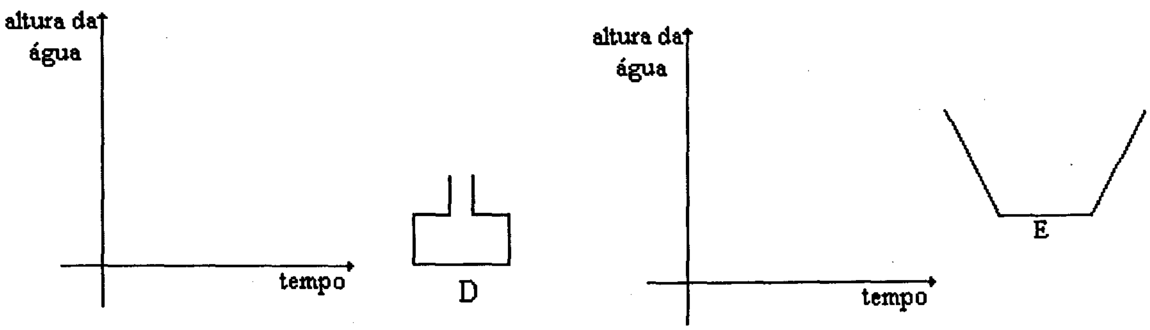
1. Numa aula de laboratório foram feitas experiências que consistiam em encher recipientes de diferentes formas, a partir de uma torneira cujo caudal era constante. Verificava-se o tempo que esta levava a enchê-los.

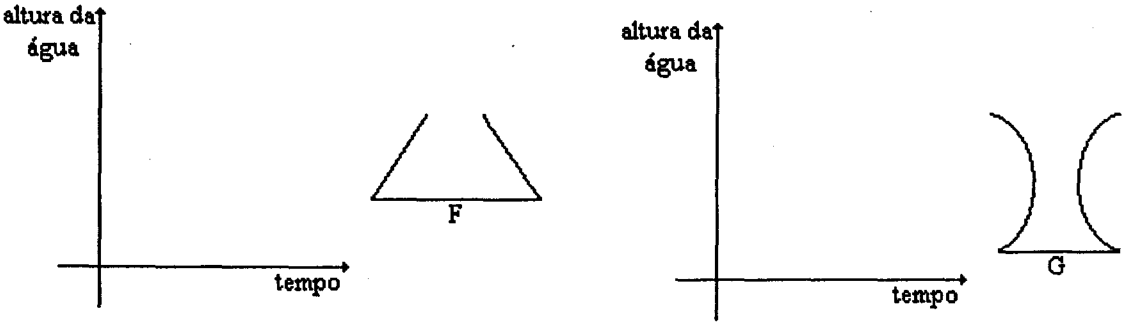
a) Supondo que o gráfico A representa o enchimento do recipiente A, desenha, no mesmo referencial, gráficos para o enchimento dos vasos B e C.



b) Explica o raciocínio que te levou a responder à questão anterior.

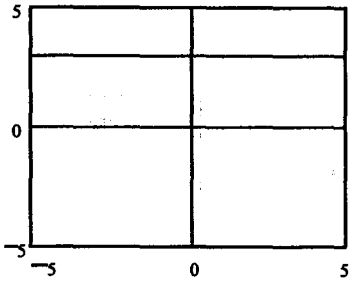
c) Desenha os gráficos do enchimento dos recipientes D, E, F e G e tenta justificar os esquemas que fizeres.



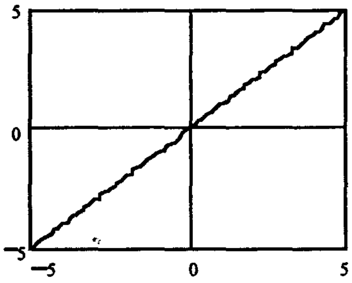


2. Em cada um dos referenciais, desenha o gráfico da função derivada correspondente (se sentires necessidade de fazer cálculos, indica-os).

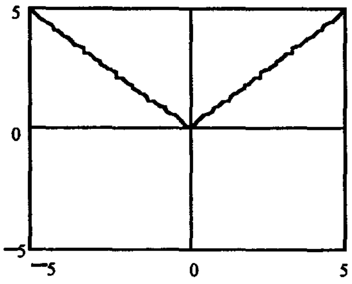
I



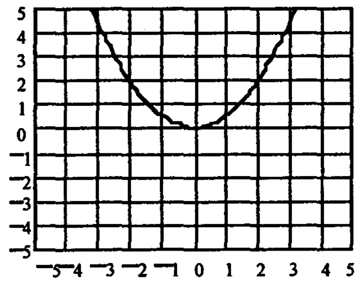
II



III

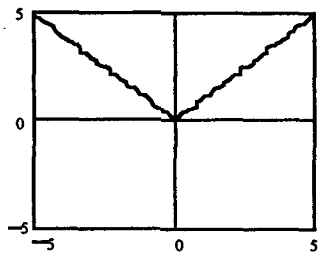


IV

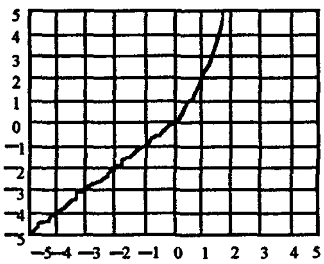


3. a) Indica, a partir da observação gráfica, um valor aproximado da derivada de cada uma das funções representadas, no ponto x = 0.

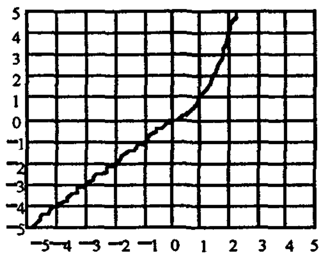
I



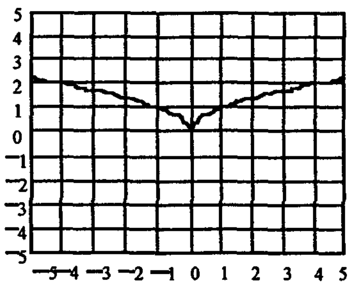
II



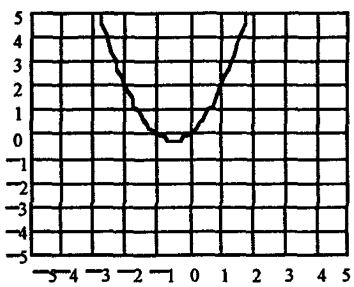
III



IV



V

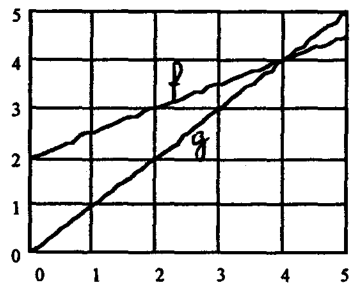


b) Existe tangente à curva de cada uma das funções, no ponto x = 0?

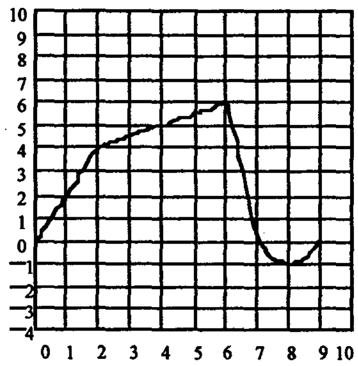
Nos casos em que existir, desenha-a.

Nos casos em que pensas que não existe, tenta explicar a razão.

4. Observa os gráficos das funções representadas no referencial abaixo. Qual a função que cresce mais rapidamente no intervalo $\left[2, 4\right]$? Justifica a tua resposta.



5. Observa o gráfico da função e completa:



a) A função é crescente no intervalo $\left]0, 6\right[$, no entanto, esse crescimento é mais acentuado no intervalo $\left]0, 2\right[$ do que no intervalo $\left]2, 6\right[$, Porque ....

....

....

b) A função é decrescente no intervalo $\left]6, 8\right[$. Este decrescimento é mais acentuado no intervalo .... do que no intervalo ...., porque ....

....

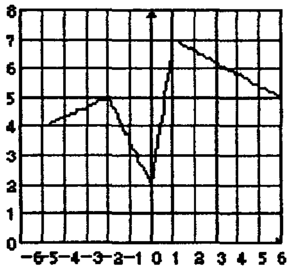
....

Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12º Ano - V

Abril / 1995

Derivadas

1. Considera o gráfico da função, de domínio $[-5, 6]$.



Completa:

- f'(-5) = ...
- $\forall_{x \in]-5,-2[}\ f'(x) =$ .... porque ....

....

....

- Existe f'(-2)? .... Justifique.

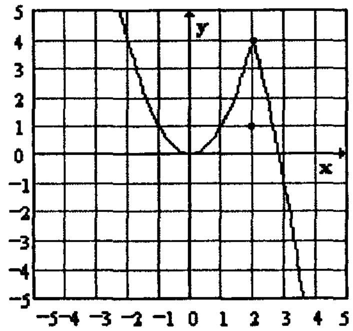
- $\forall_{x \in]-2,0}\ f'(x) =$ .... porque ....

....

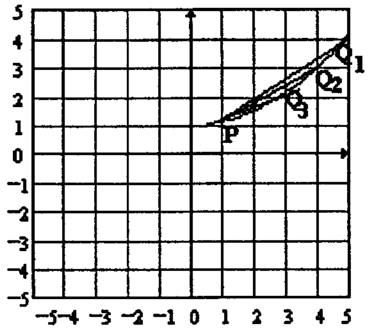
- Existe f'(0)? .... Justifique.

- Existe f'(6)? .... Justifique.

2. Calcule, graficamente e se existir, a derivada no ponto de abcissa **2**, da função:

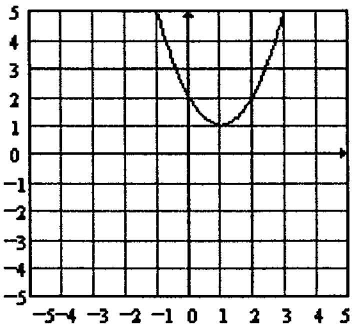


3. Em relação à figura seguinte, o que acontece às secantes PQ sobre a curva, quando o ponto Q_n se aproxima do ponto P?

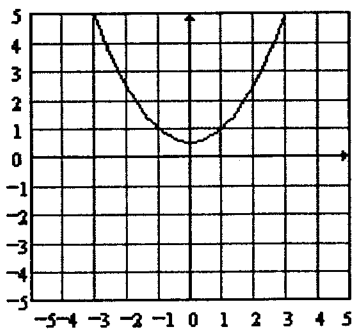


4. Sem efectuares cálculos, indica o valor de f'(1), sendo

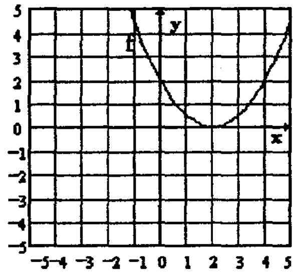
4.1. $f(x) = x^2 - 2x + 2$



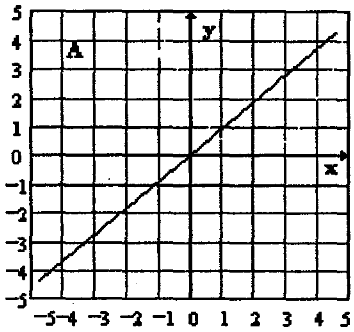
4. 2. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$

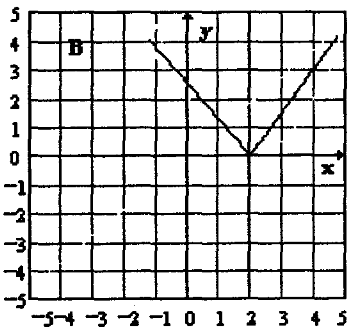


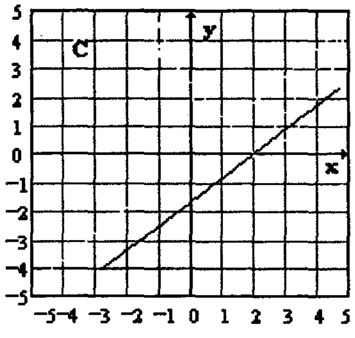
5. Dado o gráfico da função f:

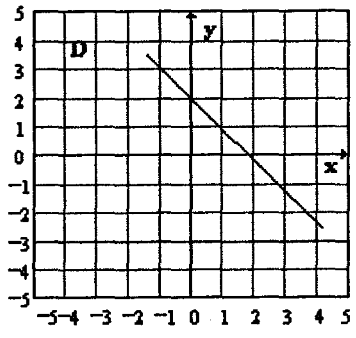


Qual dos gráficos A, B, C ou D é o gráfico de f'? Justifica a resposta.

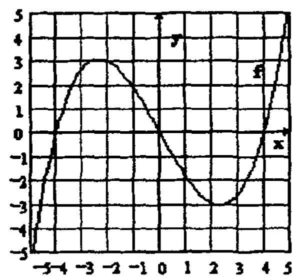




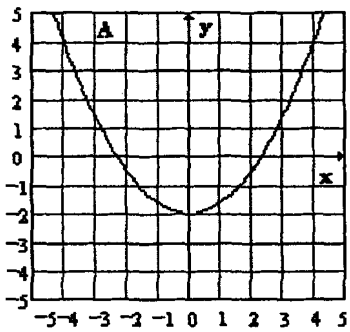


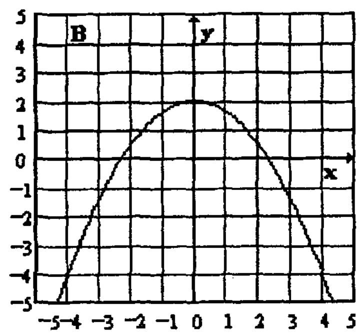


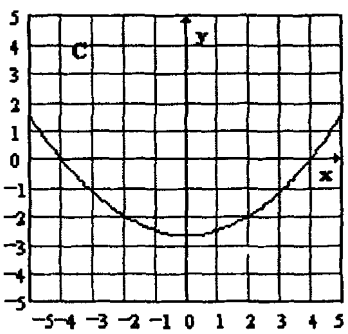
6. Dado o gráfico da função f:

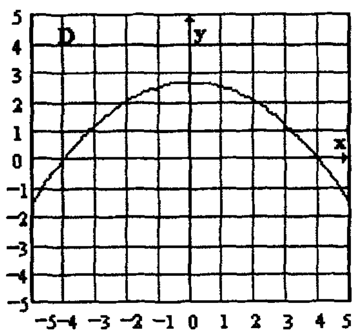


Qual dos gráficos A, B, C ou D é o gráfico de f'? Justifica a resposta.

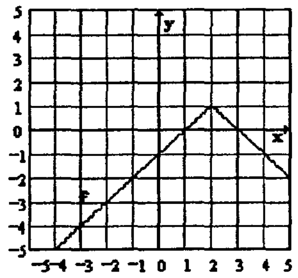




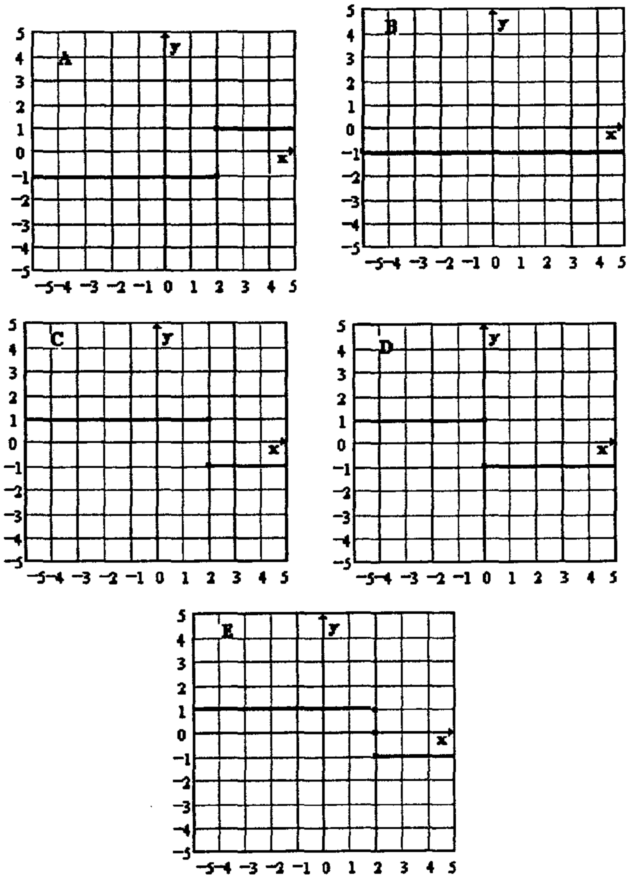




7. Dado o gráfico da função f:



Qual dos gráficos A, B, C, D ou E é o gráfico de f'? Justifica a resposta.



Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12º Ano - VI

Abril / 1995

Derivadas

1. O espaço percorrido por um móvel é, em função do tempo, dado por s(t) = 5t + 2.

1.1. Mostre que a velocidade média é constante em qualquer intervalo de tempo.

1.2. Que relação existe entre as velocidades média e instantânea? Justifique.

2. Uma pedra abandonada fica submetida à acção de uma aceleração constante (g = 9,8 m/s^2).
A equação do seu movimento é $e = \frac{1}{2} g\, t^2$.

Calcule:

2.1. A velocidade média entre os instantes 2 segundos e 5 segundos.

2.2. A velocidade no instante t = 2 segundos. (Para responder a esta questão pode usar o computador)

3. Carlos lançou verticalmente, de baixo para cima, uma bola. A altura h, em metros, atingida pela bola t segundos após o lançamento é dada pela expressão

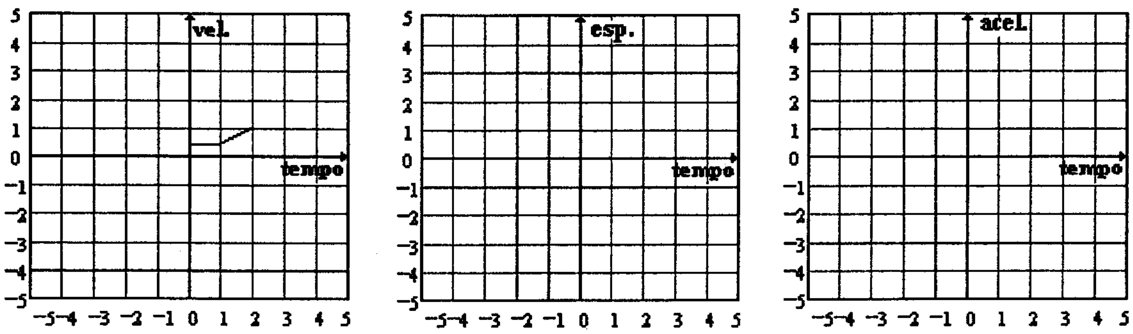
$e = 16\,t - 4\,t^2$ (h em metros, t em segundos)

3.1. Determine o instante em que a recta tangente à curva descrita pela bola é horizontal.

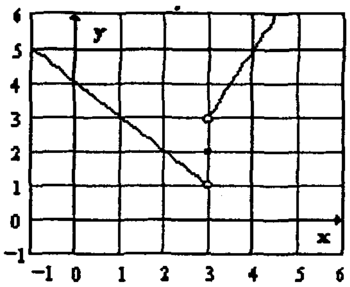
3.2. Durante quanto tempo as tangentes à curva têm declive positivo?

3.3. As tangentes à curva terão declive negativo? Quando?

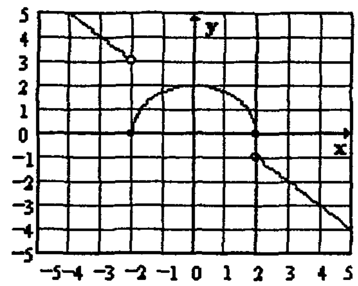
4. Dado o gráfico **velocidade-tempo** da figura, constrói gráficos plausíveis de **espaço-tempo** e **aceleração-tempo** para o mesmo sistema. Justifica.



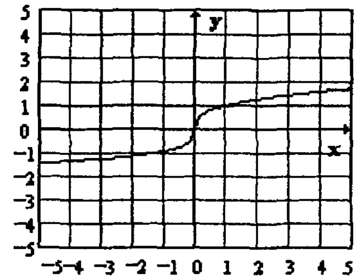
5. Apenas pela observação do gráfico, diz, se existir, qual a derivada da função no ponto de abcissa 3.



6. Apenas pela observação do gráfico, diz, se existir, qual a derivada da função nos pontos de abcissa -2 e 2.



7. Apenas pela observação do gráfico, diz, se existir, qual a derivada da função no ponto de abcissa 0.



Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12° Ano - 7

Maio/1995

1. Indica, justificando o valor lógico de cada uma das afirmações:

a. Se uma função é contínua num ponto então tem derivada finita nesse ponto.

b. Se uma função é descontínua num ponto então não tem derivada finita nesse ponto.

c. Se uma função tem derivada num ponto então é contínua nesse ponto.

d. Se uma função f é descontínua num ponto, então, esse ponto não pertence ao domínio de f'.

e. Se um ponto x_0 não pertence ao domínio de f', então f é descontínua em x_0.

f. Se $f'(x_0) = 0$ e f' muda de sinal nesse ponto, então $f(x_0)$ é um extremo local (máximo ou mínimo de f).

g. Se f é diferenciável num intervalo aberto I e se admite um extremo no ponto $x_0 \in I$, então $f'(x_0) = 0$

h. Se $f'(x_0) = 0$, então f admite um extremo em x_0.

i. Se $f''(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto de inflexão.

j. Suponhamos que não existe $f'(a)$ e que o sinal de f' é diferente à direita e à esquerda de a. Então, nesse ponto, a função tem um extremo.

k. Suponhamos que não existe $f'(a)$ e que o sinal de f' é diferente à direita e à esquerda de a. Se f é contínua em a então, nesse ponto, a função tem um extremo.

2. Considere os subconjuntos de $\Re$:

$$X = \left]0, 1\right[\qquad\qquad Y = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$$

e sejam $f: X \to \Re$ e $g: Y \to \Re$ duas quaisquer funções diferenciáveis tais que:

$$f'(x) = 0, \ \forall_{x \in X} \qquad\qquad g'(x) = 0, \ \forall_{x \in Y}$$

Considere ainda as afirmações seguintes:
(i) f é constante em X. (ii) g é constante em Y.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) (i) e (ii) são verdadeiras. (B) (i) é verdadeira e (ii) é falsa.

(C) (i) é falsa e (ii) é verdadeira. (D) (i) e (ii) são falsas.

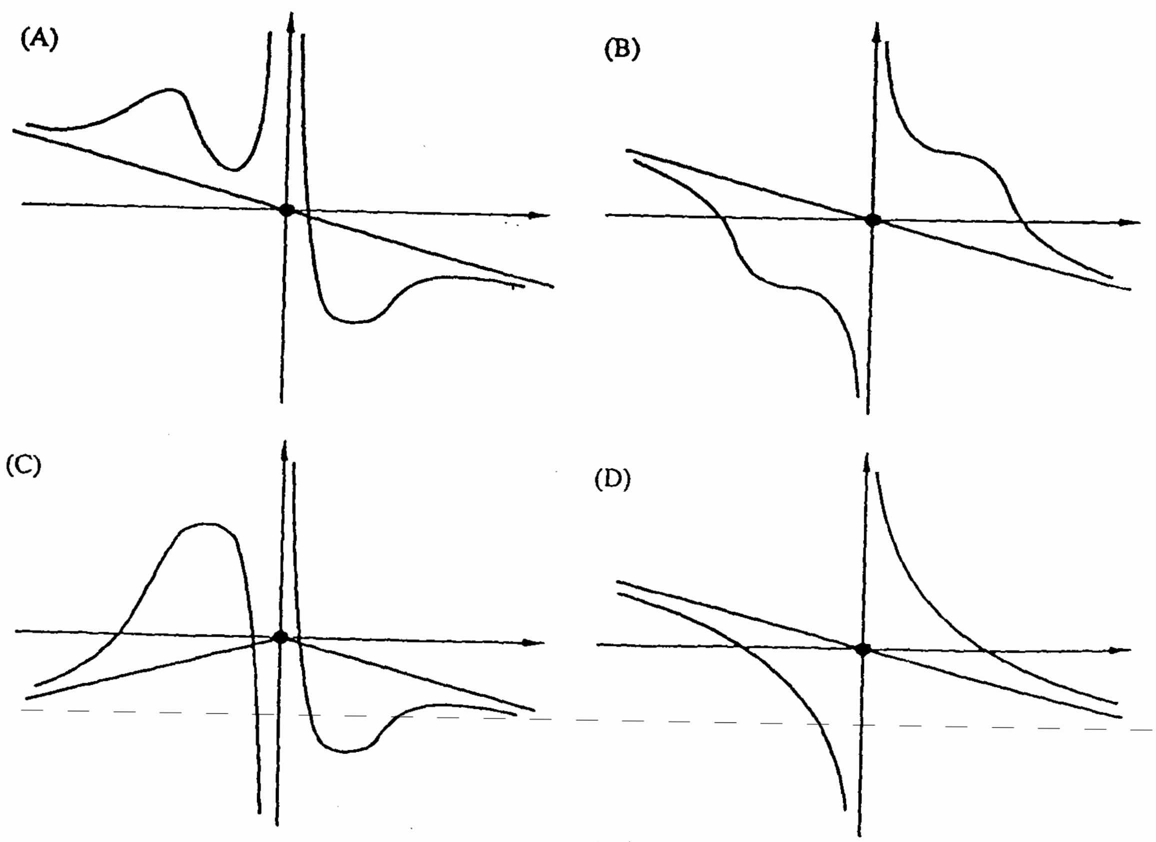
3. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função <u>ímpar</u> tal que

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

(ii) $f'(1) = 0$

(iii) f tem uma assímptota quando $x \to +\infty$ de equação $y = -\frac{1}{2}x$.

Qual dos seguintes pode ser o gráfico de f ?

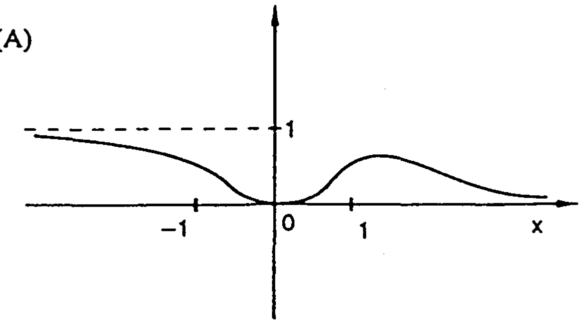


4. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo às seguintes condições:

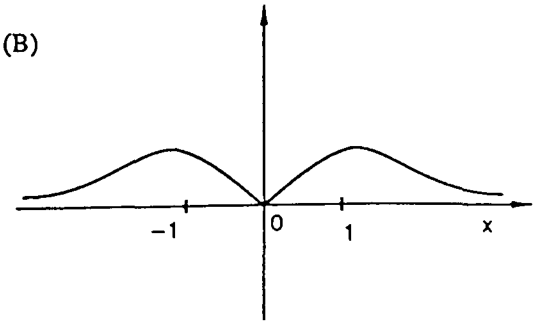
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$; (iii) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o gráfico do <u>módulo</u> de f ?

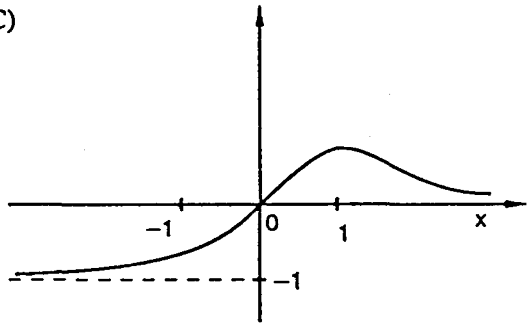
(A)



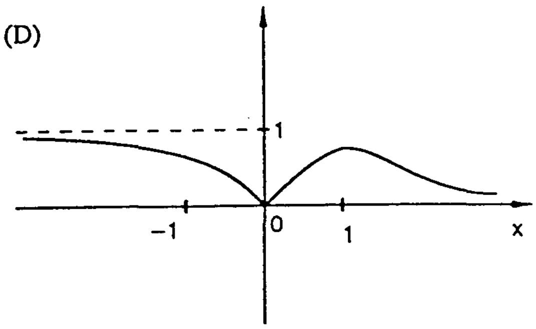
(B)



(C)

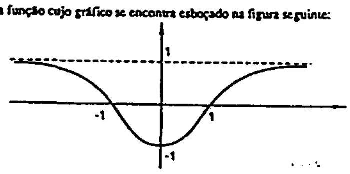


(D)



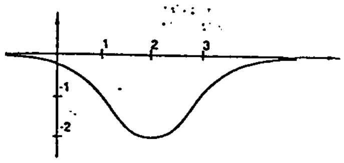
5.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico se encontra esboçado na figura seguinte:

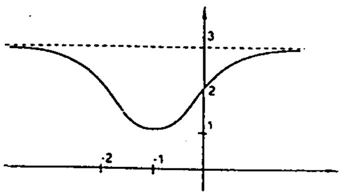


Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função $x \to f(x+2)-1$?

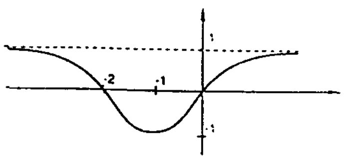
(A)



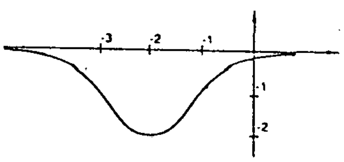
(B)



(C)



(D)



Escola Secundária de S. João do Estoril
Ficha de Trabalho de 12º Ano - VIII

Junho / 1995

1. Supõe que tinhas que explicar a um colega o que é a derivada de uma função num ponto. Descreve como o farias. (Não deves dar como resposta que $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$).

2. A função derivada de uma função contínua tem que ser contínua? Justifica.

3. Considera a função real de variável real $f(x) = 5x + 2$.

   Mostra que a taxa de variação média é constante em qualquer intervalo.

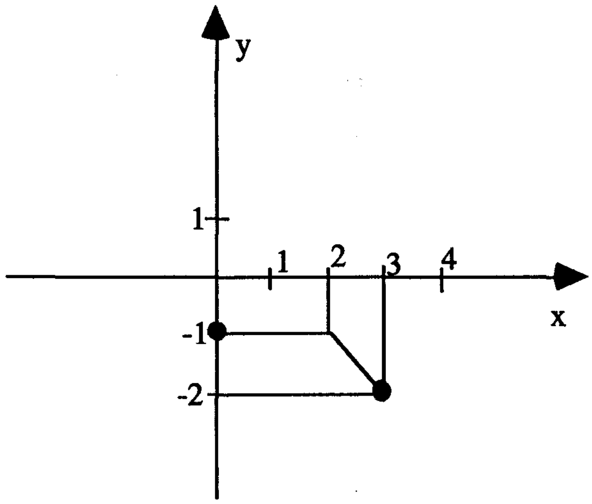
4. Considera a função $f(x) = 16\,x - 4x^2$.

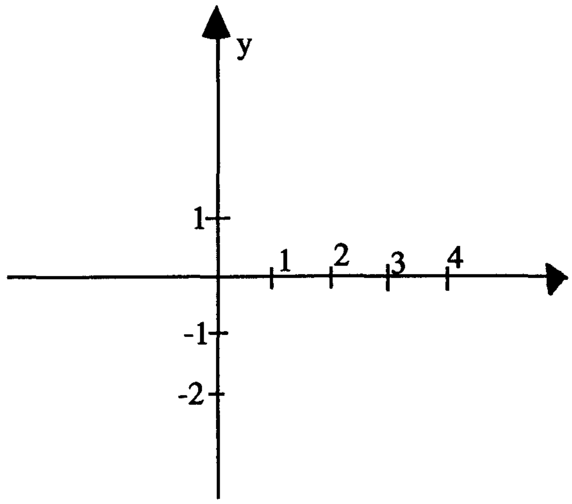
   a) Determina a abcissa do ponto em que a tangente ao gráfico de f é horizontal. Justifica.

   b) Quais os pontos em que as tangentes à curva têm declive positivo? Justifica.

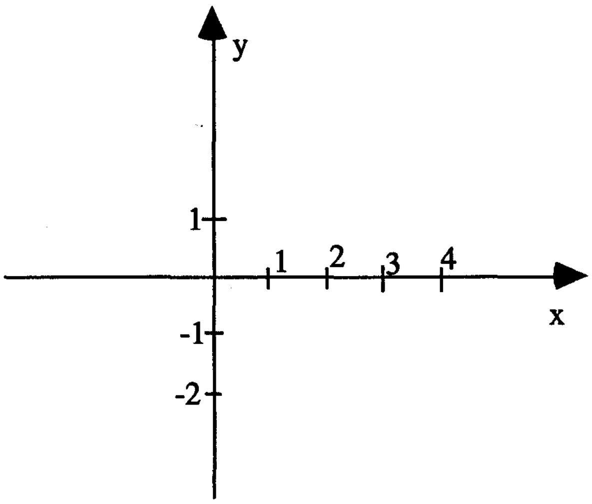
   c) As tangentes ao gráfico terão declive negativo? Quando? Justifica.

5. Considera o gráfico da função derivada de uma função f, no intervalo $[0, 3]$.





Tenta representar os gráficos das funções **f** e **f´´**



6. Seja f uma função real de variável real, diferenciável em IR e tal que f(1)=1 e f´(1)=2.

a) Qual das seguintes é uma equação para a recta r tangente ao gráfico de f no ponto (1, 1)? Justifica convenientemente a resposta.

(A) $y = x$ (B) $y = 2x$ (C) $y = 2x - 1$ (D) $y = x^2$

b) Qual das seguintes é uma equação para a recta que passa no ponto (-1, 1) e é paralela à recta r da alínea anterior? Justifica convenientemente a resposta.

(A) $y = 2x - 3$ (B) $y = 2x + 3$ (C) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (D) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Escola Seundária de S. João do Estoril
12º Ano - Ficha IX

Maio de 1995

Ficha de trabalho de Matemática
(Estudo dos intervalos de crescimento e decrescimento de uma função)

---

1. Estudo do sentido de variação de uma função.

> Vamos observar gráficos de funções e da sua derivada e através deles procurar relacionar o sinal da derivada de uma função num dado intervalo com o crescimento ou decrescimento da função nesse mesmo intervalo.

1.1. Traça o gráfico de $f(x)= -0.1x^2+x+3.9$ no intervalo [-5, 5].

- Sobrepõe o gráfico de f ' no mesmo intervalo.

  Completa:
  O sinal de f ' é ....nesse intervalo
  Quanto à monotonia f é ....nesse intervalo.

- Apaga o gráfico anterior.

1.2 Traça o gráfico de $f(x) = 0.1x^2+x-2.4$ no intervalo [-5, 5].

- Sobrepõe o gráfico de f' no mesmo intervalo.

  Completa:
  O sinal de f ' é ....nesse intervalo
  Quanto à monotonia f é ....nesse intervalo.

- Apaga o gráfico anterior.

1.3 Traça o gráfico de $f(x)=0.1x^2-1.2x-2.8$ no intervalo [-5, 5].

- Sobrepõe o gráfico de f ' no mesmo intervalo.

  Completa:

  O sinal de f ' é ....nesse intervalo
  Quanto à monotonia f é ....nesse intervalo.

- Apaga o gráfico anterior.

1.4 Traça o gráfico de $f(x)= -0.2x^2-2x+2.2$ no intervalo [-5, 5].

- Sobrepõe o gráfico de f ' no mesmo intervalo.

  Completa:

  O sinal de f ' é ....nesse intervalo
  Quanto à monotonia f é ....nesse intervalo.

- Apaga o gráfico anterior.

1.5 Traça o gráfico de $f(x)=3$ no intervalo [-5, 5].

- Sobrepõe o gráfico de f ' no mesmo intervalo.

  Completa:

  O sinal de f ' é ....nesse intervalo
  Quanto à monotonia f é ....nesse intervalo.

- Apaga o gráfico anterior.

1.6 Traça o gráfico de f(x)= -2 no intervalo [-5, 5] .

- Sobrepõe o gráfico de f ' no mesmo intervalo.

Completa:

O sinal de f ' é ....nesse intervalo
Quanto à monotonia f é ....nesse intervalo.

Podes resumir o que observaste em 3 propriedades diferentes:

1ª. *Se uma função admite derivada negativa em todos os pontos do intervalo*..

2ª. *Se uma função admite derivada positiva em todos os pontos de um intervalo*..

3ª. *Se uma função admite derivada nula em todos os pontos de um intervalo* ....

Problema 1 :

Sabe-se que a derivada de uma função é dada por f '(x) = -2x+6. Indica, por observação do gráfico de f ', os intervalos em que a função é crescente e em que é decrescente.
Essa observação pode ser resumida no quadro seguinte:

zero de f '
↓

x	$-\infty$	3	$+\infty$
sinal de f '		0	
variação de f			

Conclusão: f é decrescente no intervalo..........
f é crescente no intervalo ....

Problema 2:

Sabe-se que a derivada de uma função é dada por $g'(x)=3x^2-3$. Indica, por observação do gráfico de g', os intervalos em que a função é crescente e em que é decrescente.
Essa observação pode ser resumida no quadro seguinte:

zero de g′ ↓ (em −1) zero de g′ ↓ (em 1)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
sinal de g'		0		0	
variação de g					

Conclusão: g é decrescente no intervalo..........
g é crescente no intervalo ....

Problema 3:

Sabe-se que a derivada de uma função é dada por $h'(x)=\frac{-5}{(x-6)^2}$. Indica, por observação do gráfico de h'(x), os intervalos em que a função é crescente e em que é decrescente.
Essa observação pode ser resumida no quadro seguinte:

ponto de acumulação que não pertence ao domínio ↓ (em 6)

x	$-\infty$	6	$+\infty$
sinal de h'		-	
variação de h			

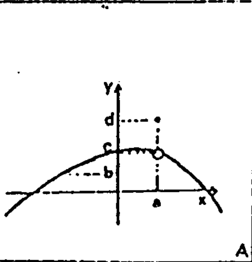
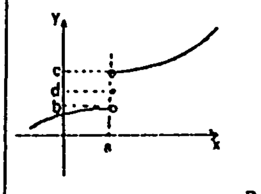
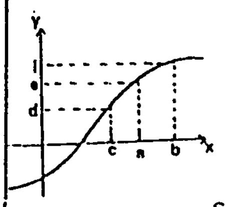
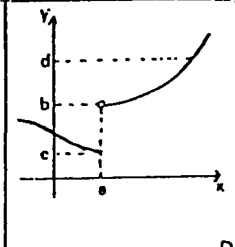
Conclusão: h é decrescente no intervalo..........
h é crescente no intervalo ....

Escola Secundária de S. João do Estoril
12º Ano - Ficha X

Maio de 1995

---

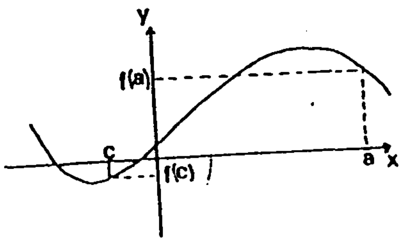
1. Complete o quadro seguinte:

função f	função g	função h	função i
 A	 B	 C	 D
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to a^+} g(x) =$	$\lim\limits_{x \to a^+} h(x) =$	$\lim\limits_{x \to a^+} i(x) =$
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to a^-} g(x) =$	$\lim\limits_{x \to a^-} h(x) =$	$\lim\limits_{x \to a^-} i(x) =$
$f(a) =$	$g(a) =$	$h(a) =$	$i(a) =$

Indique as finções contínuas no ponto a.

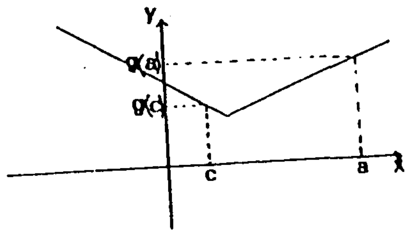
2. De cada uma das funções f e g seguintes, indique, recorrendo ao gráfico o sinal de:

2.1. f ' (a)



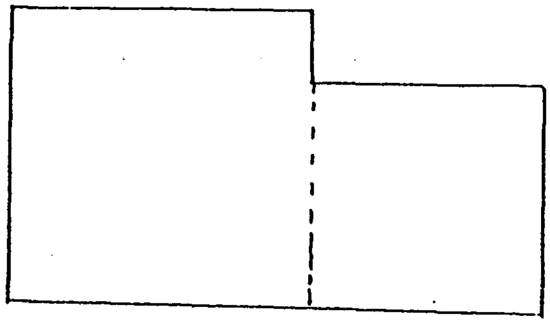
2.2. f' (c)

2.3. g' (a)

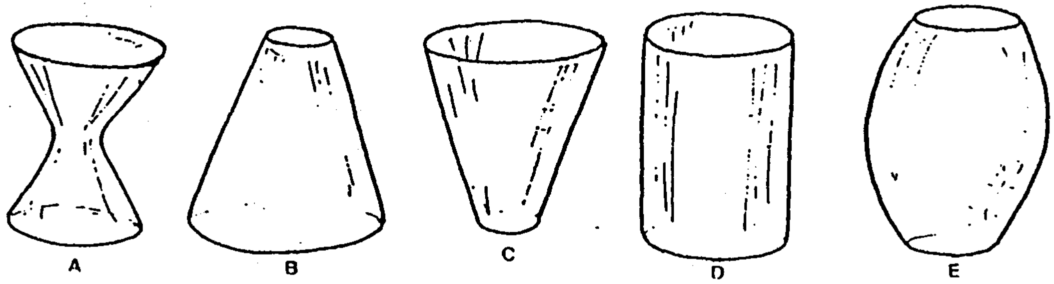


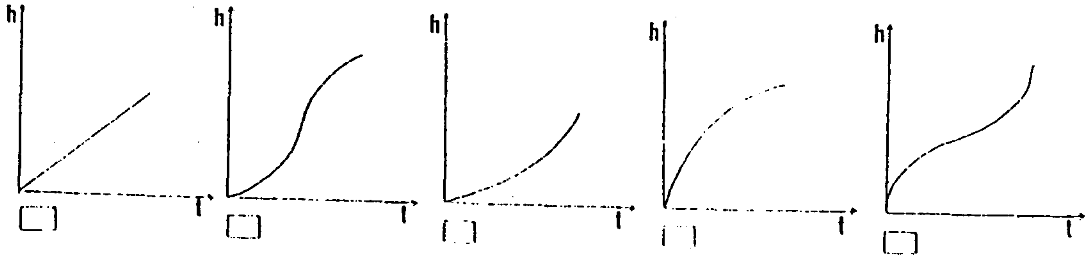
2.4. g' (c)

3. Pretende-se construir uma figura formada por dois quadrados justapostos (ver figura). Sabendo que o perímetro da figura é 36 cm, calcule o lado de cada quadrado para que a área seja mínima.



4. Se fizermos correr água de uma torneira com débito constante para cada um dos recipientes, podemos representar graficamente (ver figura) a altura da água como função do tempo em que a torneira está aberta.





No quadrado junto de cada gráfico escreve a letra que identifica o recipiente correspondente a esse gráfico.

Anexo 2

ESCOLA SECUNDÀRIA S. JOÃO DO ESTORIL
MATEMÁTICA

11/05/95 12ºT5
Duração: 2horas

Apresenta todos os cálculos que tiveres que efectuar

1.

1.1. Uma das raizes índice 4 de um complexo z é $2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$. Sem determinar z, calcula as outras e raizes.e representa-as no plano d'Argand. Calcula , na forma algébrica, z^3.

1.2. Sendo $z=\operatorname{cis}\frac{\theta}{2}$ e $0<\theta<\pi$, mostra que $z^2+z^6 = 2\cos\theta \,.\, \operatorname{cis}(2\theta)$ (exame)

2. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-2k}{n}$

2.1. Tendo em conta as propriedades dos somatórios mostra que $u_n = -n+\frac{1}{n}$

2.2. Determina, caso exista, $\lim\left(-\frac{u_n}{n}\right)^n$

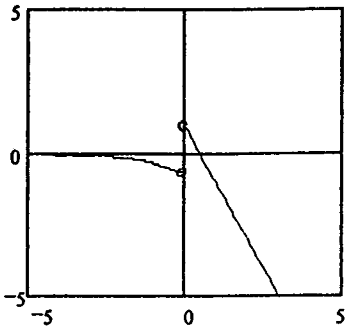
(exame)

3. Considera os sub conjuntos de R $A=\left\{x\in R: \sum_{n=4}^{7}|x+1| = \sqrt{16x^2}\right\}$,

$B=\left\{x\in R: \quad 2x e^{-x} - e^{-x} > 0\right\}$ e $C=\left\{x\in R: \quad \log_3(x^2-1)<2\right\}$

Mostra que $A\cup B\cup C$ é limitado inferiormente. Determina a fronteira de $A\cup B\cup C$.

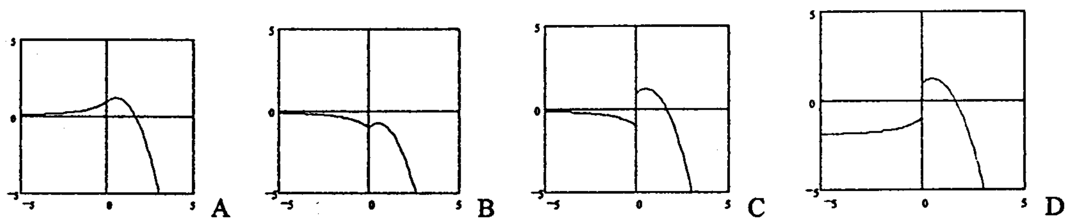
4. O gráfico seguinte é a representação gráfica da função derivada f ' de uma função f em [-5, 5].



4.1. Indica, justificando, o valor lógico de cada uma das afirmações:
- f é continua em [1, 5]
- f(-2) > f(-1)
- f(1) é um mínimo relativo

4.2. Comenta a afirmação "A função f não é continua para x=0"

4.3. Quais dos seguintes gráficos podem ser o da função f ? Justifica a resposta.



5. Considera a função g definida em R por: $g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

5.1. Mostra que a função g é contínua em [-1, 1]

5.2. Sendo a < 0 e b > 0, calcula g ' (a) e g ' (b) . Escreve equações das tangentes ao gráfico de g nos pontos **a** e **b** .

5.3. Justifica que g ' (0) = 1

5.4. Utiliza os resultados anteriores para justificar que g não tem extremos relativos.

5.5. Calcula : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

5.6. Estuda o sentido da concavidade da representação gráfica de g.

5.7. Faz um esboço do gráfico de g.

Wanda

ESCOLA SECUNDÀRIA S. JOÃO DO ESTORIL MATEMÁTICA

17/05/95 — 12°T3

Duração: 2horas

Apresenta todos os cálculos que tiveres que efectuar

1. Seja C o corpo dos complexos e $z = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$ pertencente a C .

   1.1. Determina , na forma trigonométrica $w = \dfrac{z^2}{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$

   1.2. Determina o menor natural n, tal que z^n seja um número real

2. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1}$

   2.1. Prova que $u_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2}$

   2.2. Determina, caso exista, $\lim\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)^{2^n}$

(exame)

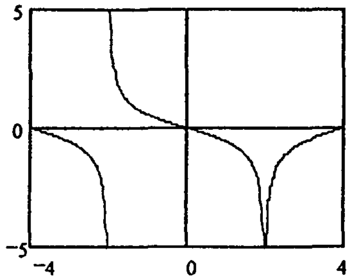
3. Considera os sub conjuntos de R $A=\left\{x \in R:\ 2^{2\log x}{}_2 + e^{-\log x} = \log e^{2/x}\right\}$

   e $B=\left\{x \in R:\ \left|x^3-1\right| \leq |x-1|\right\}$

Determina o interior e o derivado de $A \cup B$.

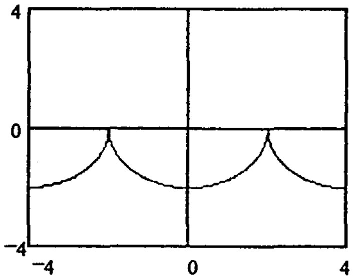
v.s.f.f.

4. O gráfico seguinte é a representação gráfica da função derivada f' de uma função f em [-4, 4].

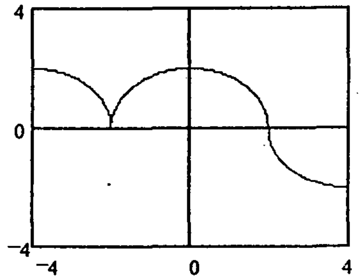


4.1. Indica, justificando, o valor lógico de cada uma das afirmações:
f é contínua em [-1, 1]
$f(-1) > f(0)$
$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in [-2, 2]$
f (0) é um mínimo relativo.

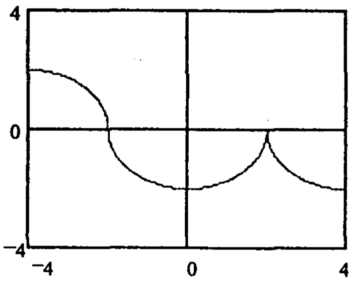
4.2. Quais dos seguintes gráficos podem ser o da função f ? Justifica a resposta.



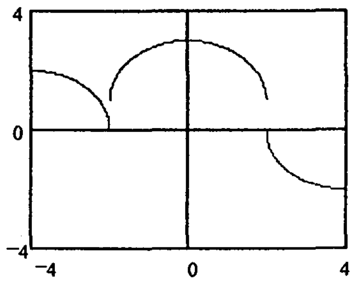
A



B



C



D

5. Considera a função g definida em R por: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ |x|\, e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

5.1. Averigua se a função g é contínua à esquerda e à direita do ponto 0 .

5.2. Calcula : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

5.3. Caracteriza a função derivada de g (x).

5.4. Justifica que $g'(1)$ é um mínimo relativo.

5.5. Determina uma equação da recta tangente ao gráfico de g (x) no ponto x = - 1.

5.6. Estuda o sentido da concavidade da representação gráfica de g.

5.7. Faz um esboço do gráfico de g.

A SECUNDÀRIA S. JOÃO DO ESTORIL
MATEMÁTICA

3/06/95 12ºT5
Duração: 2horas

Apresenta todos os cálculos que tiveres que efectuar

1. Seja (C, α) um semi grrpo comutativo em que C representa o conjunto dos complexos e α a operação definida por $z_1 \alpha z_2 = i \cdot z_1 \cdot z_2$. (. multiplicação usual) Considera ainda o isomrfimo f de (C, α) sobre (C, θ) tal que f: $C \to C$ e $f(z) = -2iz$

   1.1. Justifica que $-i$ é o elemento neutro de (C, α) e calcula o elemento neutro de (C, θ)

   1.2. Averigua se (C, θ) é grupo.

2.

   2.1. Mostra que $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6 = -1$

   2.2. Representa na forma trigonométrica $i\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

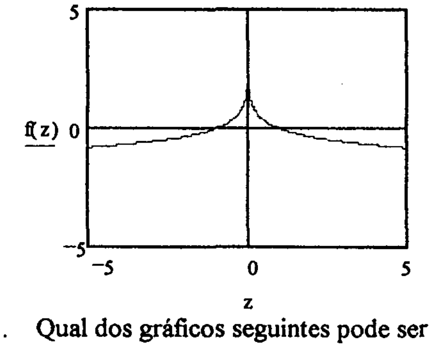
   2.3. Representa no plano d'Argand $z+\bar{z} \le z \times \bar{z} \wedge \operatorname{Im}(z) < 0.5$

3. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \log\frac{1}{3n-1}$

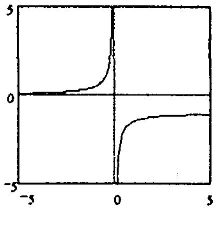
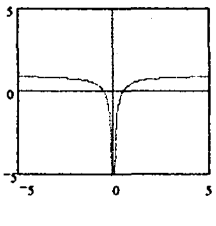
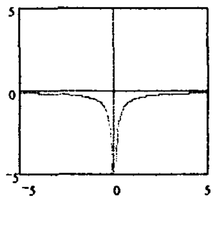
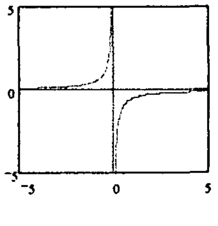
3.1. Justifica que (u_n) é uma sucessão de termos negativos e decrescente.

3.2. Calcula $\lim[2n(u_{n+1} - u_n)]$ (exame)

4.
Seja f uma função cujo gráfico se encontra esboçado na figura seguinte:

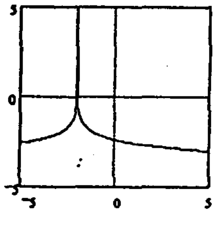
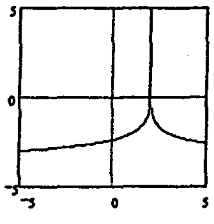
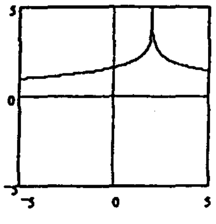
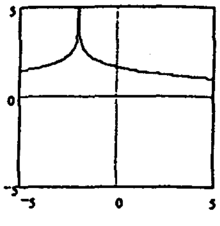


4.1. Qual dos gráficos seguintes pode ser o f' ? Justifica.


A

B

C

D

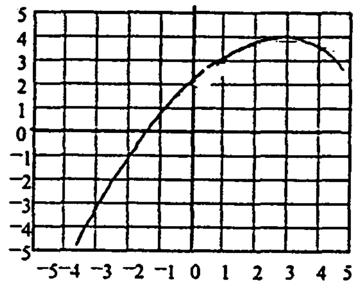
v.s.f.f.

4.2. Qual dos gráficos sguintes pode ser o de $f(x-2)+2$? Justifica.


A

B

C

D

5. Considera a seguinte equação $x^3 - 3x + k = 0$ onde k é um parâmetro real. Indica para que valoes de k podemos afirmar que a equação tem 3 raizes distintas ? Justifica.

6. Observa o gráfico da função f.



Sendo

$$a = \frac{f(1) - f(0.97)}{0.03}, \quad b = f'(1), \quad c = \frac{f(1.03) - f(1)}{0.03}$$

Qual dos números a, b ou c é o maior ? Justifica .

7. Considera a função real de variável real definida por: $h(x) = \begin{cases} 6 - xe^{2/x} & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ \log\dfrac{x-2}{x-1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

7.1. Determina k de modo que h seja continua à esquerda de zero.
7.2. Mostra que a função tem dois zeros no intervalo $]\,0, +\infty\,[$.
7.3. Determina os intervalos de monotonia da função h.
7.4. Determina o sentido da concavidade do gráfico de h.
7.5. Faz um esboço do gráfico de h.
7.6. Escreve uma equação da recta tangente à curva de h paralela ao eixo das abcissas.

A SECUNDÀRIA S. JOÃO DO ESTORIL
MATEMÁTICA

7/06/95 12ºT3
Duração: 2horas

Apresenta todos os cálculos que tiveres que efectuar

1. Seja $f: C \to C$, com $f(z) = \frac{1}{i}\bar{z}$ um isomorfimo de $(C, +)$ sobre (C, θ)

1.1. Calcula $(1 + i)\,\theta\,(1 - i)$

1.2. Averigua se (C, θ) é grupo.

2. 2.1. Dado o complexo $z = \frac{a - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} + i}$, determina a de modo que z seja imaginário puro.

2.2. Resolve em C a equação $z^4 + 16\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0$ e mostra, graficamente que a soma das suas raizes é zero.

2.3. Representa no plano d'Argand conjunto definido pela seguinte condição em C:

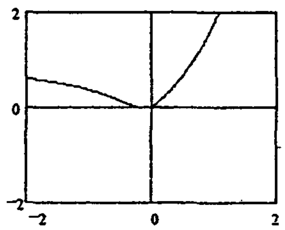
$$|z - 2i| \le |z| \ \wedge \ |z - 2| \le 2$$

3. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \operatorname{arctg}\sqrt{n}$

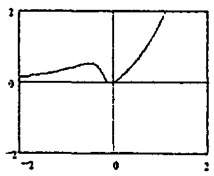
3.1. Justifica que (u_n) é uma sucessão monótona e convergente.Indica o tipo de monotonia e o limite.

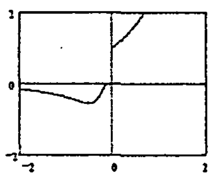
3.2. Calcula $\lim\left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg}u_{2n}}\right)^{\operatorname{tg}u_n}$ (exame)

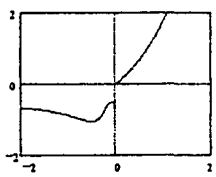
4. Seja f uma função cujo gráfico se encontra esboçado na figura seguinte:

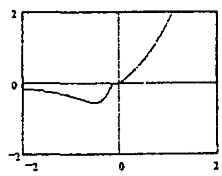


4.1. Qual dos gráficos seguintes pode ser o f' ? Justifica.

 A

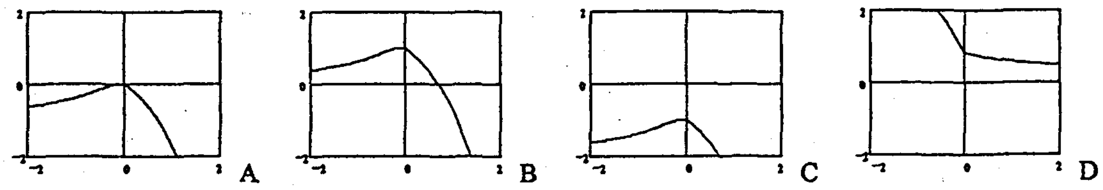
 B

 C

 D

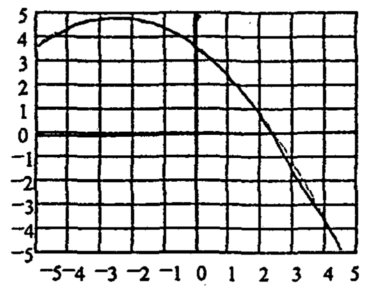
v.s.f.f.

4.2. Qual dos gráficos seguintes pode ser o de $-f(x)+1$? Justifica.



5. Seja f uma função real de variável real definida por $f(x)=1-e^{x}$. Escreve uma equação da recta tangente ao gráfico de f que seja paralela ao segmento AB sendo $A(0,0)$ e $B(1,1-e)$.

6. Observa o gráfico da função f.



Sendo

$$a=\frac{f(1)-f(0.97)}{0.03},\qquad b=f'(1),\qquad c=\frac{f(1.03)-f(1)}{0.03}$$

Qual dos números a, b ou c é o maior ? Justifica.

7. Considera a função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1/e\}$ definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\log x} & \text{se} \quad x>0\\ xe^{x} & \text{se} \quad x\leq 0\end{cases}$

7.1. Estude a continuidade da função para $x=0$.
7.2. Determine as assimptotas ao gráfico de f.
7.3. Mostra que, em $]-\infty, 0]$ a única raiz de xe^{x} é 0.
7.4. Determina os intervalos de monotonia da função.
7.5. Determina o sentido da concavidade do gráfico de f.
7.6. Faz um esboço do gráfico de h.

Anexo 3

Inquérito

I

1. Costumas trabalhar com computador fora da escola? Sim ❑ Não ❑

2. Se respondeste Sim à questão anterior, diz quais os programas com que costumas trabalhar e a finalidade da sua utilização.

3. Nos anos lectivos anteriores desenvolveste actividades na escola em contexto computacional? Em que ano(s)? Com que programa(s)?

II

Na escola, este ano, utilizaste uma folha de cálculo para levares a cabo o estudo das sucessões e um programa de gráficos para o estudo das derivadas de funções e para a representação gráfica de funções.

1. Indica:

1.1. As dificuldades que sentiste ao trabalhar com estas ferramentas.

1.2. As vantagens que sentiste (no caso de achares que houve vantagens) na sua utilização.

1.3. O modo (interesse, desinteresse...) com que desenvolveste as actividades propostas.

1.4. Se sentiste alguma diferença na apreensão e/ou aprofundamento de alguns conceitos matemáticos. Quais?

2. O trabalho desenvolvido nestas aulas ajudou-te na resolução de questões colocadas na aula "normal" de Matemática? De que modo?

3. As actividades destas aulas foram essencialmente desenvolvidas em grupo. Pensas que esta metodologia de trabalho te ajudou? De que modo?

4. Estas aulas exigiram-te um esforço suplementar num momento em que a preparação para as provas de aferição e específica poderiam estar no centro das preocupações. Diz o que pensas sobre este assunto.

6. Sugere algumas alterações para futuras experiências do mesmo tipo.

Inquérito

I

1. Costumas trabalhar com computador fora da escola? Sim ❑ Não ❑

2. Se respondeste Sim à questão anterior, diz quais os programas com que costumas trabalhar e a finalidade da sua utilização.

3. Nos anos lectivos anteriores desenvolveste actividades na escola em contexto computacional? Em que ano(s)? Com que programa(s)?

4. Na escola, este ano, tiveste oportunidade de utilizar uma folha de cálculo o estudo das sucessões e um programa de gráficos para o estudo das derivadas de funções e para a representação gráfica de funções.
Indica a razão (ou razões) que te levaram a **não** frequentares estas aulas de Matemática.